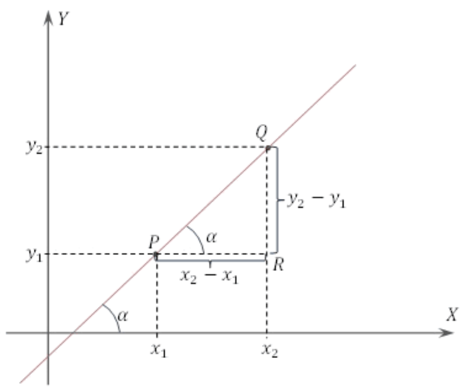
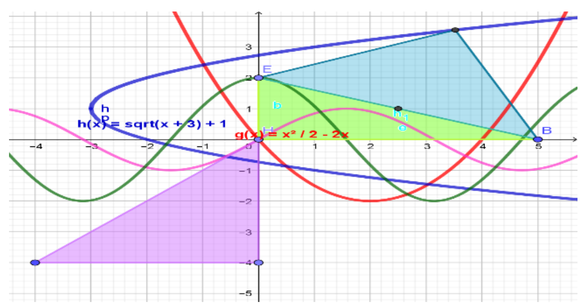
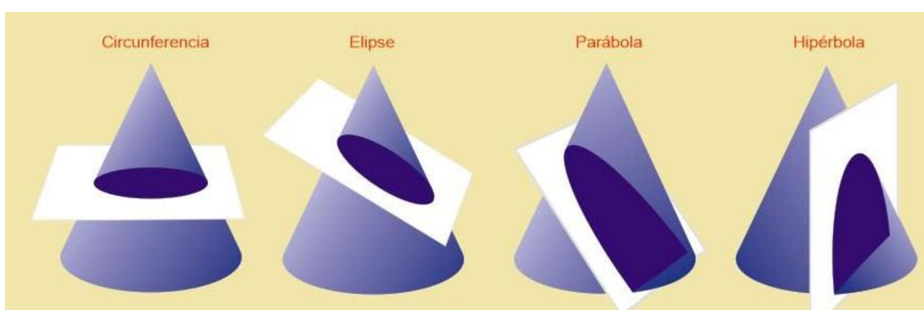
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL SUR

GUÍA DE ESTUDIO DE MATEMÁTICAS III
(ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA)







Elaborado por los Profesores

M. en D. Francisco Javier Avilés Zúñiga

M. en E. María de Guadalupe Islas Caballero

Act. Álvaro Escuadra Gallegos

Ing. Martín Joya Cruz

Ing. María Mónica Fuentes Romero

Fis. Nora Patricia Orozco de la Garza

Agosto 2018

Universidad Nacional Autónoma de México

Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades
Plantel Sur

Guía de estudios para preparar el examen extraordinario de MATEMÁTICAS III

Basado en el programa actualizado de 2016

Impreso en Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades
Plantel Sur

Autores:

M. en D. Francisco Javier Avilés Zúñiga

Act. Álvaro Escuadra Gallegos

Ing. María Mónica Fuentes Romero

M. en E. María de Guadalupe Islas Caballero (Coordinadora)

Ing. Martín Joya Cruz

Fis. Nora Patricia Orozco de la Garza

Planeación y Edición
M. en E. María de Guadalupe Islas Caballero

Agosto 2018

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Esta guía de estudio de Matemáticas III, está elaborada por profesores del Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Sur, con el fin de que todo alumno que vaya a presentar su examen extraordinario, tenga un apoyo pedagógico a través de diversas actividades para su desarrollo de habilidades, comprensión y procedimiento durante su estudio personal y presente su examen con éxito.

En la guía encontrarás en cada una de las unidades **instrucciones**, **presentación de la unidad, conceptos claves** que son básicos, los cuales algunos fueron adquiridos en semestres anteriores, así como **teoremas y definiciones** que corresponden a esta asignatura, donde se recomienda que se memoricen, para realizar satisfactoriamente **los ejercicios** que te corresponden, también contiene **ejemplos y ejercicios** resueltos con diferentes grados de dificultad. con el fin de que tu aprendizaje sea gradualmente, posteriormente hay **autoevaluación** y en cada unidad hay **bibliografía básica, complementaria y mesografía,** que la biblioteca de tu colegio podrás encontrar.

A continuación, te damos las cinco unidades que cumplen el programa de estudio vigente 2016, de la asignatura Matemáticas III.

Unidad 1. Elementos de trigonometría
Unidad 2. Elementos básicos de geometría analítica.
Unidad 3. La recta y su ecuación cartesiana
Unidad 4. La parábola y su ecuación cartesiana
Unidad 5. La circunferencia, la elipse y sus ecuaciones

RECOMENDACIONES PARA TU ESTUDIO

- Estudia en horas apropiadas, así como el lugar.
- Es necesario que uses calculadora científica.
- Durante tu estudio ten libros de la bibliografía para aclarar tus dudas.
- Revisa tu procedimiento en cada ejercicio.
- Si hay subtemas o temas que se te dificulta, ve a asesoría del colegio.

“Te deseamos lo mejor en tu examen extraordinario”

Unidad 1. Elementos de trigonometría

Presentación

En esta unidad el alumno comprenderá los conceptos de razones e identidades trigonométricas, así como las leyes de senos y cosenos mediante la resolución de problemas en distintos contextos que involucren triángulos con la finalidad de construir conocimientos que serán empleados en asignaturas posteriores.

Conceptos claves

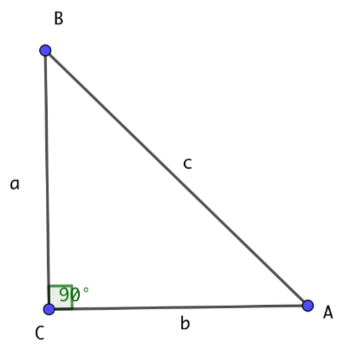
Número racional. Es un número que se puede expresar de la forma a/b donde a, b son números enteros y b ≠ 0.

Razón. Se llama razón a la relación que se establece entre dos magnitudes y se representa como un número racional.

Recíproco de un número. Es el inverso multiplicativo de un número.

Semejanza. Dos polígonos son semejantes cuando las medidas de los lados homólogos guardan la misma proporción y sus ángulos correspondientes son congruentes.

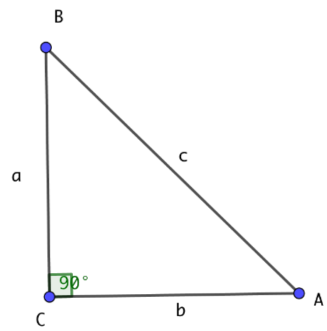
Teorema de Pitágoras. En todo triángulo rectángulo, la suma de las áreas que se dibujan sobre los catetos es equivalente al área del cuadrado que se dibuja sobre la hipotenusa.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Sugerencias de actividades de aprendizajes teórico práctico

Trigonometría: Es la rama que de las matemáticas que estudia las relaciones, propiedades y leyes que determinan a los elementos de los triángulos en términos de las llamadas razones trigonométricas, y el análisis que se hace de relaciones derivadas de estas razones.



Sea el triángulo ABC.

Donde:

- A, B, C son los ángulos internos del triángulo rectángulo.
- A y B son los ángulos agudos y C es el ángulo recto.
- a, b son las longitudes de los catetos del triángulo y c es la longitud de la hipotenusa.

Con respecto al ángulo A:

- a representa la longitud del cateto opuesto
- b representa la longitud del cateto adyacente
- c representa la longitud de la hipotenusa

Razón trigonométrica: Es la relación que se establece entre las longitudes de dos de sus lados de un triángulo rectángulo con uno de sus ángulos agudos.

Definición de razones trigonométricas

Razones trigonométricas directas

$$\sin A = \frac{longitud\ del\ cateto\ opuesto}{longitud\ de\ la\ hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{longitud\ del\ cateto\ adyasente}{longitud\ de\ la\ hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{longitud\ del\ cateto\ opuesto}{longitud\ del\ cateto\ adyasente} = \frac{a}{b}$$

Razones trigonométricas recíprocas

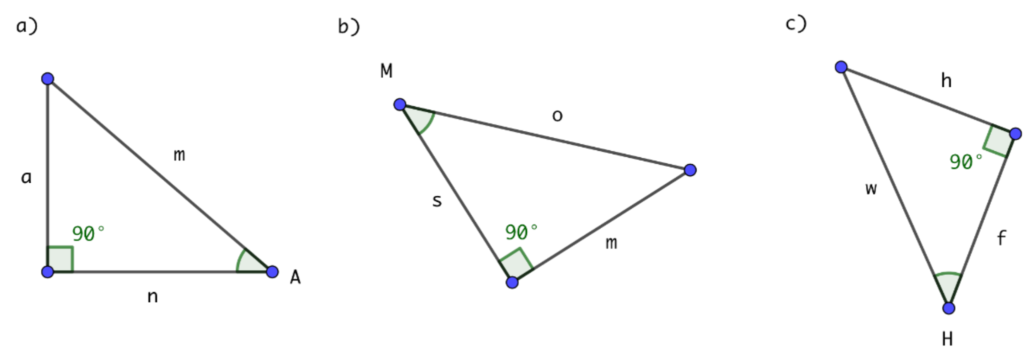
$$\cot A = \frac{longitud\ del\ cateto\ adyasente}{longitud\ del\ cateto\ opuesto} = \frac{b}{a}$$

$$\sec A = \frac{longitud\ de\ la\ hipotenusa}{longitud\ del\ cateto\ adyasente} = \frac{c}{b}$$

$$\csc A = \frac{longitud\ de\ la\ hipotenusa}{longitud\ del\ cateto\ opuesto} = \frac{c}{a}$$

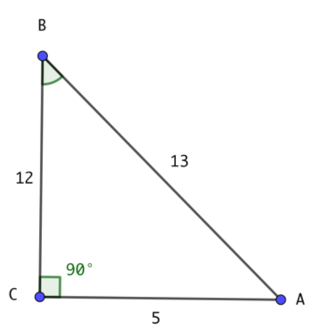
Ejercicio 1.

Indica, en los siguientes triángulos rectángulos, la hipotenusa, así como el cateto opuesto respecto al ángulo indicado.



Ejemplo 1:

Expresa las razones trigonométricas directas y recíprocas del triángulo rectángulo para el ángulo B.



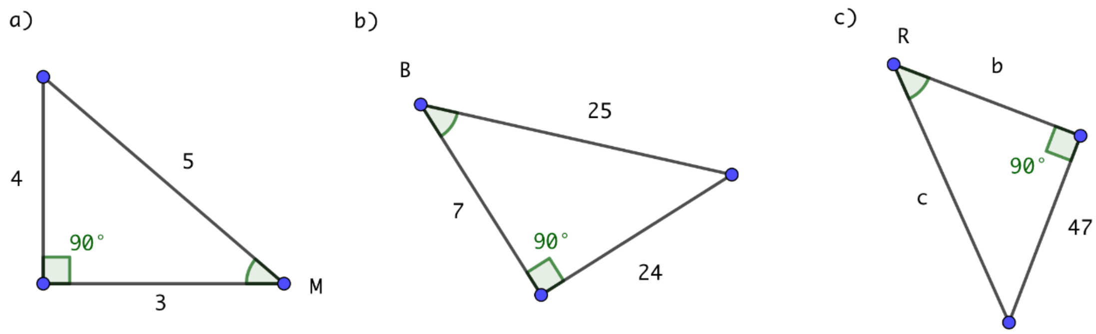
Solución:

$\sin B = \frac{5}{13}$ $\quad \csc B = \frac{13}{5}$

$\cos B = \frac{12}{13}$ $\quad \sec B = \frac{13}{12}$

Ejercicio 2.

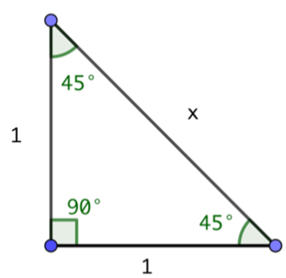
Expresa las razones trigonométricas directas y recíprocas de los siguientes triángulos rectángulos para el ángulo señalado.



Triángulos rectángulos notables

Para el triángulo rectángulo uno, determina la longitud de la hipotenusa x.

Triángulo uno

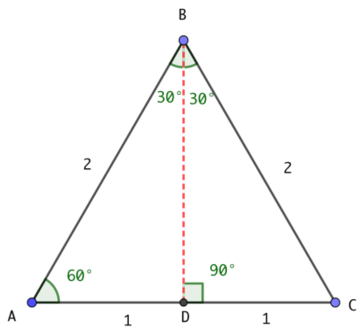


La longitud de la hipotenusa es: ___________

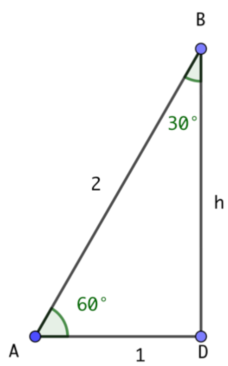
¿De qué tipo de triángulo se trata?

Sea el triángulo equilátero ABC de lado de magnitud de 2 unidades.

Triángulo dos



Se traza la altura $\overline{BD}$ con respecto al lado $\overline{AC}$, y se forman dos triángulos rectángulos congruentes que son el ∆ABD y el ∆DBC.



Tomamos el ∆ABD, con ayuda del teorema de Pitágoras determina el valor de la altura h.

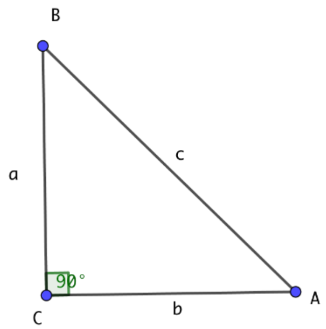
El valor de h es: _______________

Con los datos que se tienen que obtuviste para el *triángulo uno* y *triángulo dos* completa la siguiente tabla.

Tabla de ángulos notables

	seno	coseno	tangente	cotangente	secante	cosecante
30º						
45º						
60º						

Operaciones trigonométricas inversas



Sea el triángulo ∆ABC un triángulo rectángulo y A el ángulo agudo de referencia.

$\sin A = \frac{a}{c}$, es una expresión que indica que si se conoce el ángulo se puede determinar el valor de la razón seno del ángulo A.

Cuando se conoce el valor de la razón trigonométrica y se desea conocer el valor del ángulo se utiliza la expresión conocida como la inversa de la razón trigonométrica, esta se expresa de las siguientes maneras.

- $A = \sin^{-1}(\frac{a}{c})$; se lee*, ángulo A es igual al seno inverso de* $\frac{a}{c}$
- $A = angsin(\frac{a}{c})$; se lee, *ángulo A es igual al ángulo cuyo seno es* $\frac{a}{c}$
- $A = \arcsin(\frac{a}{c})$; se lee, *ángulo A es igual al arco seno de* $\frac{a}{c}$

Estas expresiones son equivalentes, pero la primera de ellas es la más empleada, ya que es el código de la calculadora.

Todas las razones trigonométricas tienen inversa; en la calculadora solo se pueden calcular de manera directa las operaciones inversas de las razones trigonométricas directas.

Razones trigonométricas	Operaciones inversas
$sin\,A = \frac{a}{c}$	$A = \sin^{-1}\frac{a}{c}$
$cos\,A = \frac{b}{c}$	$\mathrm{A} = \cos^{-1}\frac{b}{c}$
$tan\,A = \frac{a}{b}$	$A = \tan^{-1}\frac{a}{b}$
$cot\,A = \frac{b}{a}$	$\mathrm{A} = \cot^{-1}\frac{b}{a}$
$sec\,A = \frac{c}{b}$	$A = \sec^{-1}\frac{c}{b}$

$$csc\,A = \frac{c}{a} \qquad\qquad \boxed{A = \csc^{-1}\frac{c}{a}}$$

Ejemplo 2.

Determina el valor del ángulo, utilizando operaciones trigonométricas inversas.

$\sin A = (\frac{1}{\sqrt{2}})$

Solución

Para determinar el valor del ángulo se utiliza la operación inversa de la razón seno, para despejar al ángulo.

$A = \sin^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$

A = 45º, utilizando la tabla de razones trigonométricas de ángulos notables.

Ejemplo 3.

Determina el valor del ángulo, utilizando operaciones trigonométricas inversas.

$\cos A = (\frac{7}{10})$

Solución

Si se revisan las tablas de ángulos especiales nos damos cuenta que la razón $\frac{7}{10}$ no pertenece a ninguno de estos ángulos, por lo tanto este cálculo se debe realizar con ayuda de la calculadora.

$A = \cos^{-1}(\frac{7}{10})$

Oprime la siguiente secuencia de teclas en tu calculadora científica.

Shift + cos + (+ 7 + $\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$ +10 +) + =

A = 45.573º

Ejercicio 3.

Con ayuda de las operaciones trigonométricas inversas, determina el valor del ángulo.

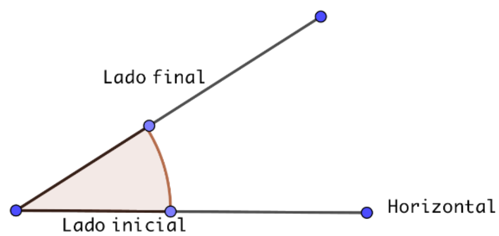
a) Si, $\sin A = 0.65$

b) Si, $\cos B = \frac{5}{9}$
c) Si, $\tan C = \frac{7}{4}$
d) Si, $\cot D = \frac{3}{4}$
e) Si, $\csc E = 1.5$

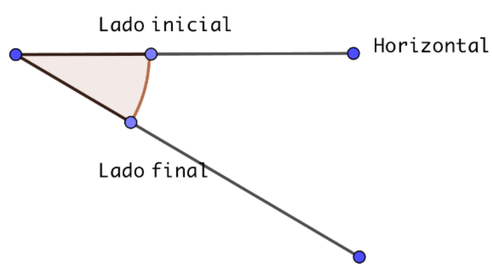
Solución de problemas de aplicación

Definiciones

Ángulo de elevación: Es el que se forma a partir de una horizontal como lado inicial y girando en contra de las manecillas del reloj para encontrar el lado final.



Ángulo de depresión: Es el que se forma a partir de una horizontal como lado inicial y girando como las manecillas del reloj para encontrar el lado final.



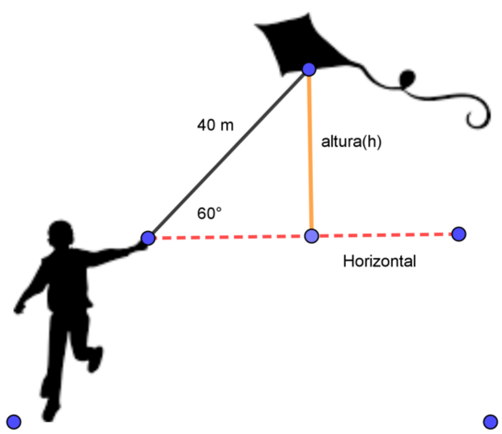
Ejemplo 4.

La longitud de una cuerda que sujeta a un papalote es de 40 [m] y el ángulo de elevación que se forma con la horizontal es de 60º. ¿Cuál es la altura a la que vuela el papalote?

Solución

1) Representar con un dibujo la situación planteada.

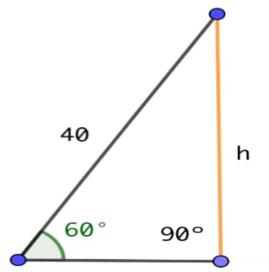
2) Ubicar los datos e incógnitas del problema en la figura.



- La diagonal que va de la mano del niño al papalote es la longitud de 40 m.
- La horizontal se traza en este caso, a la altura a la que se sostiene la cuerda del papalote.
- Esta horizontal se toma como lado inicial del ángulo de elevación que se forma con la cuerda que sería el lado final del ángulo.

- La altura (h) por la cual se pregunta, es la distancia perpendicular medida desde la horizontal hasta la posición del papalote.

3) Se extrae el triángulo construido con los datos e incógnita señalados en él.



Del triángulo rectángulo se tienen dos datos y una incógnita.

- Se conoce uno de los ángulos agudos que es de 60º y tomaremos como ángulo de referencia.
- La longitud de la hipotenusa es de 40 m
- La incógnita es la longitud del cateto opuesto, que en este caso es la altura (h).

4) Se hace el planteamiento de la ecuación con la información obtenida del triángulo.
Como se conoce el valor de la longitud del cate opuesto y de la hipotenusa, así como el valor de un ángulo agudo de referencia se establece la razón trigonométrica *seno*.

$$\sin 60° = \frac{\mathrm{h}}{40}$$

Ecuación donde se establece una relación entre los datos y la incógnita del problema.

5) Se resuelve la ecuación.

$\mathrm{h} = 40 \sin 60°$; Se despeja a la incógnita.

$\mathrm{h} = 34.64$; Se calcula de valor de la incógnita.

6) Se responde a la pregunta del problema.

El papalote vuela a 34.64 m de altura con respecto a la horizontal.

Ejercicio 4.

Resuelve los siguientes problemas de aplicación.

a) Desde lo alto de un faro de 150 m de altura se observa una embarcación con un ángulo de depresión de 23°; calcula la distancia del faro a la embarcación.

b) Se desea construir una rampa de 25 m de longitud, que se eleve a una altura de 5 m. ¿Cuál deberá ser la medida del ángulo de elevación?

c) Un pentágono regular está inscrito en un círculo de diámetro igual a 10 cm. Calcula: a. El lado del pentágono, b. Su perímetro y c. Su área.

d) Calcula el radio del círculo inscrito en un hexágono regular de lado 0.75 m.

Identidades trigonométricas

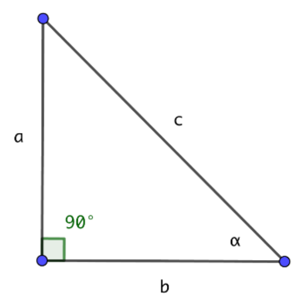
Ecuación: es una igualdad que se verifica para valores específicos de la(s) incógnita(s).

Identidad: Es una igualdad que se verifica para cualquier valor que adopte la incógnita.

Partiendo de las razones trigonométricas revisadas anteriormente, se pueden obtener una serie de identidades trigonométricas, las cuales pueden ser utilizadas para cambiar una expresión por otra más simplificada.

Identidades fundamentales

Sea el triángulo rectángulo, con longitudes de sus lados conocidas y ángulo de referencia señalado.



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ y $\tan\alpha = \frac{a}{b}$

Si dividimos:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \tan\alpha$$

Por lo tanto, la identidad es:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Y por el recíproco de un número, también se cumple:

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

A las identidades anteriores se les conoce como *identidades trigonométricas de cociente.*

Identidades trigonométricas recíprocas

Cualquier número que se multiplica por su recíproco siempre da como resultado uno.

Como se había estudiado antes, las razones trigonométricas directas tienen sus razones recíprocas.

- La razón seno su recíproco es cosecante.
- La razón coseno su recíproco es la secante.
- La razón tangente su recíproco es la cotangente.

  Por lo tanto:

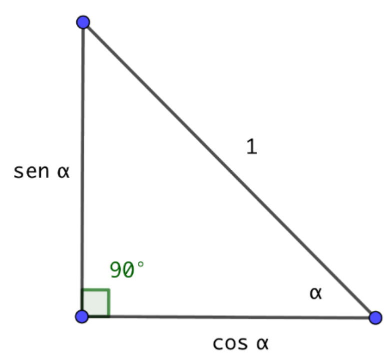
$$\sin \alpha \cdot \csc \alpha = 1$$

$$\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

Identidades trigonométricas pitagóricas

Sea el triángulo con dimensiones conocidas y ángulo α señalado.



Si se aplica el teorema de Pitágoras, se obtiene:

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \ldots (1)$$

Si a la ecuación (1) se divide entre $cos^2\alpha$, se obtiene:

$$\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

Se aplica una identidad de cociente y una identidad recíproca.

$$tan^2\alpha + 1 = sec^2\alpha \ldots (2)$$

Si a la ecuación (1) se divide entre $sin^2\alpha$, se obtiene:

$$\frac{sin^2\alpha}{sin^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha} = \frac{1}{sin^2\alpha}$$

Se aplica una identidad de cociente y una identidad recíproca.

$$1 + cot^2\alpha = csc^2\alpha \ldots (3)$$

Ejemplo 5:

Tomando en cuenta las identidades fundamentales, expresa el $sin^2\alpha$ en términos de $\cos\alpha$.

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1,$ se toma la identidad pitagórica que incluye $sin^2\alpha$.

$sin^2 = 1 - cos^2\alpha,$ se despeja a $sin^2\alpha$.

El objetivo se logró únicamente haciendo un despeje algebraico.

Ejemplo 6:

Expresa a $\cos\alpha$ en términos del $sin^2\alpha$.

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1,$ se toma la identidad que involucra a $sin^2\alpha$ y a $\cos\alpha$.

$cos^2 = 1 - sin^2\alpha,$ se despeja a $cos^2\alpha$.

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - sin^2\alpha},$ se despeja a $\cos\alpha$.

Ejemplo 7:

Expresa a $\sec\alpha$ en función de $sin^2\alpha$.

$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$ . . . (1) Se toma la identidad recíproca que involucra a $\sec\alpha$.

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ . . . (2) Se toma la identidad pitagórica.

$\cos\alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha}$ . . .(3) Se despeja a $\cos\alpha$.

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ . . . (4) De la identidad recíproca se despeja la $\sec\alpha$.

$\sec\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2\alpha}}$ . . . (5) Se sustituye la ecuación (3) en la ecuación (4

Ejercicio 5.

A cada expresión represéntala en términos de $\cos\alpha$.

a) $\frac{sin^2\alpha}{\cos\alpha}$

b) $\frac{1}{1-\sin\alpha} - \frac{1}{1+\sin\alpha}$

Ejercicio 6:

A cada expresión representa en términos de $\sin\alpha$.

a) $\frac{cos^2\alpha}{\sin\alpha}$

b) $\sin\alpha - \csc\alpha$

Ejemplo 8:

Verifica que se cumple la identidad trigonométrica.

$\csc\alpha - \cos\alpha \cdot \cot\alpha = \sin\alpha$

$\frac{1}{\sin\alpha} - \cos\alpha \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sin\alpha;$ Se sustituye la $\csc\alpha$ por su recíproco y la $\cot\alpha$ por su identidad de cociente.

$\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{cos^2\alpha}{\sin\alpha} = \sin\alpha;$ Se realiza la multiplicación.

$\frac{1-cos^2\alpha}{\sin\alpha} = \sin\alpha;$ Se realiza la resta de fracciones.

$\frac{sin^2\alpha}{\sin\alpha} = \sin\alpha;$ Se sustituye por identidad pitagórica $1 - cos^2\alpha$ por $sin^2\alpha$.

$\sin\alpha = \sin\alpha;$ Se simplifica la expresión utilizando leyes de exponentes.

Por lo tanto, la identidad se verifica.

Ejercicio 7:

Verifica las siguientes identidades trigonométricas:

a) $cos^2\alpha\,(sec^2\alpha - 1) = sin^2\alpha$
b) $(\tan\alpha + \cot\alpha)\tan\alpha = sec^2\alpha$
c) $\frac{1+\cot\alpha}{\csc\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha$

Ley de senos

La ley de senos es una herramienta que se utiliza para obtener las longitudes y ángulos internos de triángulos oblicuángulos.

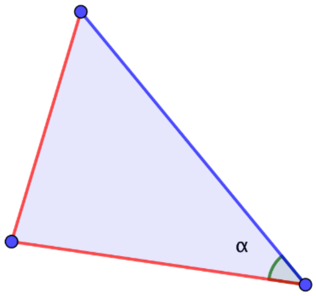
Triángulos oblicuángulos

Triángulos acutángulos: triángulo cuyos ángulos internos son agudos.

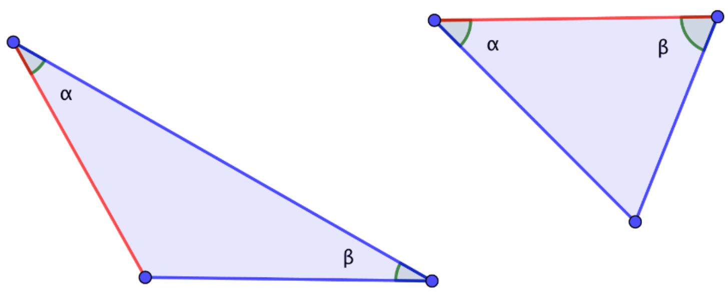
Triángulos obtusángulos: triángulos con un ángulo interno obtuso.

Para poder utilizar la ley de senos en la solución de un triángulo se debe de verificar que se cuenta con los siguientes datos:

a) Cuando se conocen las longitudes de dos lados (de color rojo) y el ángulo opuesto a estos.

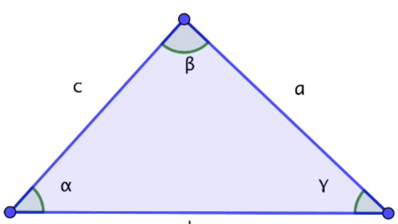


b) Cuando se conocen dos ángulos y la longitud de uno de sus lados.



Ley de senos

Sea el triángulo oblicuángulo:

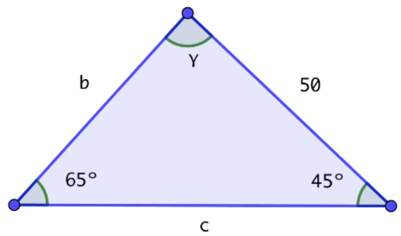


La ley de senos dice que, la razón entre el seno del ángulo y el lado opuesto a ese ángulo es igual a la razón entre el seno de otro ángulo y el la opuesto a dicho ángulo.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Ejemplo 9:

Determina las longitudes y ángulos faltantes en el siguiente triángulo.



Lados	Ángulos
a = 50	α = 65º
b = ¿?	β = 45º

Solución

Para obtener el ángulo γ, usamos el teorema de los ángulos internos en todo triángulo.

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$65° + 45° + \gamma = 180°$

$\gamma = 180° - 65° - 45°$

$\gamma = 70°$

Dado que se conocen dos ángulos y la longitud de uno de sus lados, podemos determinar la longitud de los lados faltantes se utiliza la ley de senos.

Se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{50}{\sin 65°} = \frac{b}{\sin 45°} = \frac{c}{\sin 70°}$$

Se toma la primera igualdad

$\frac{50}{\sin 65°} = \frac{b}{\sin 45°}$

Se despeja a “b” de la ecuación

$$b = \frac{50 \sin 45°}{\sin 65°}$$

b = 39.01

Se toma la igualdad

$$\frac{50}{\sin 65°} = \frac{c}{\sin 70°}$$

Se despeja a “c” en la ecuación

$$c = \frac{50 \sin 70°}{\sin 65°}$$

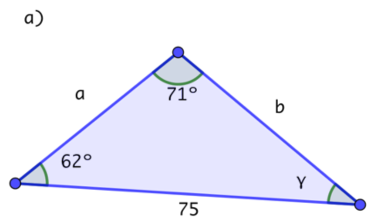
c = 51.84

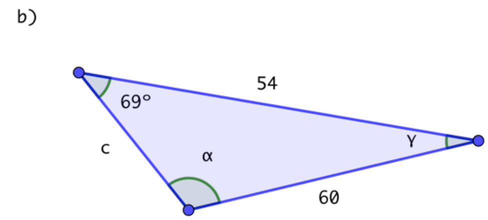
Solución

Lados	Ángulos
a = 50	α = 65º
b = 39.01	β = 45º
c = 51.84	γ = 70º

Ejercicio 8:

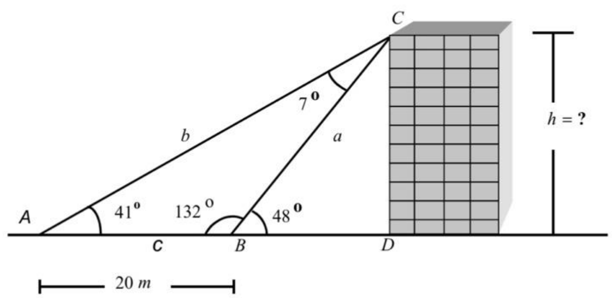
Resuelve los siguientes triángulos.





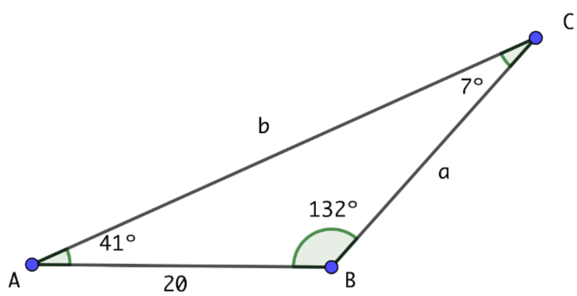
Ejemplo 10:

Cuando un edificio se ve desde el punto A, el ángulo de elevación es de 41º.Cuando se ve desde otro punto B, que se encuentra 20 m más cerca del edificio, el ángulo de elevación es de 48º. Calcular la altura del edificio.



Solución

De la figura se tiene el triángulo oblicuángulo ABC con los siguientes datos:



Datos:

Lados	Ángulos
a = ¿?	α = 41º
b = ¿?	β = 132º

Con los datos del triángulo se platea la ley de senos

$$\frac{a}{\sin 41°} = \frac{b}{\sin 132°} = \frac{20}{\sin 7°}$$

De este triángulo se necesita calcular la longitud “a”, por ello se toma la igualdad:

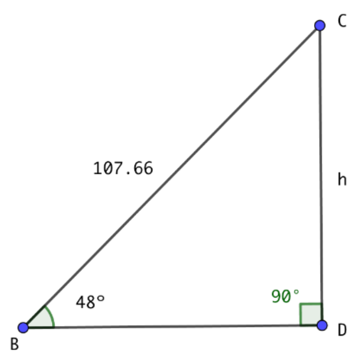
$$\frac{a}{\sin 41°} = \frac{20}{\sin 7°}$$

Se despeja la incógnita

$$a = \frac{20 \sin 41°}{\sin 7°}$$

$$a = 107.66$$

Se puede observar que se forma un segundo triángulo, que es el triángulo rectángulo BCD.



Puedes observar que se conoce un ángulo agudo, la longitud de la hipotenusa y la longitud de la longitud del cateto opuesto (h), corresponde a la altura del edificio.

Entonces se plantea la razón:

,

De la igualdad anterior se despeja “h”

$h = 107.66 \ \sin 48°$

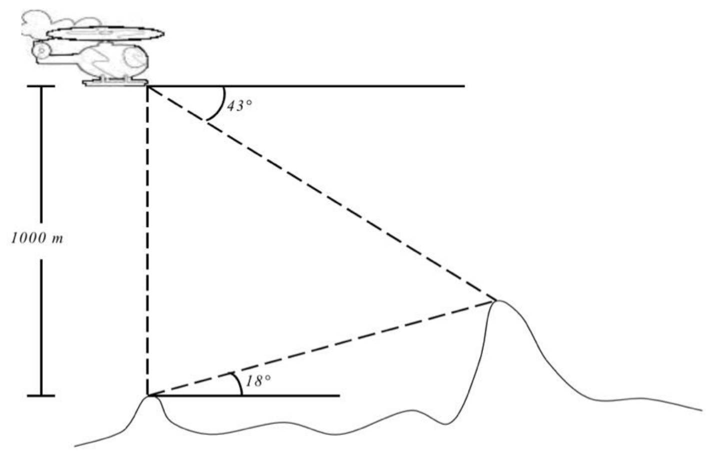
$h = 80.01$

Por lo que podemos decir que el edificio mide 80.01 m

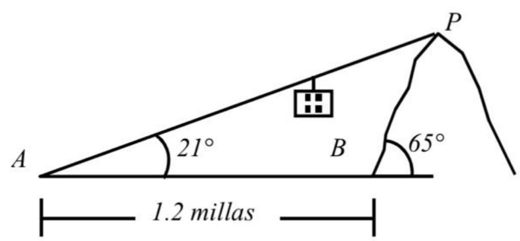
Ejercicio 9.

a) Un helicóptero se encuentra suspendido a una altura de 1000 metros sobre la cumbre de una montaña que tiene 5210 metros de altitud. Desde esa cima y desde el helicóptero puede verse la cúspide de otra montaña más alta. Desde el helicóptero, el ángulo de depresión es de 43º (ver la figura). Calcular:

i. La distancia de un pico al otro.
ii. La altitud de la cumbre de la montaña más alta.



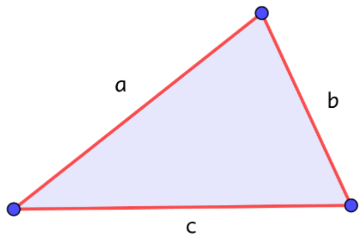
b) Como se muestra en la figura, un teleférico transporta pasajeros desde el punto A, que está a 1.2 millas del punto B que se halla en la base de una montaña, hasta un punto P de la cima de la montaña. Los ángulos de elevación de P desde A y B son 21º y 65º respectivamente.
   i. Calcular la distancia entre A y P.
   ii. Calcular la altura de la montaña.



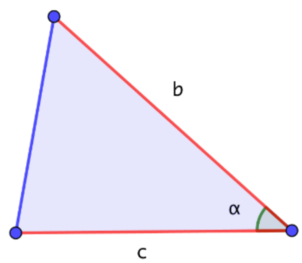
Ley de los cosenos

La ley de los cosenos al igual que la ley de senos se utiliza para resolver un triángulo oblicuángulo, pero esta se utiliza en los siguientes casos:

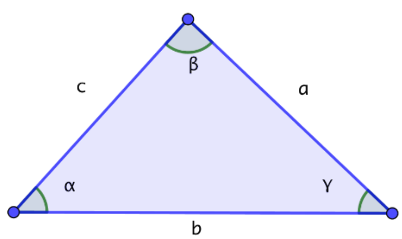
a) Cuando se conocen las longitudes de sus tres lados.



b) Cuando se conocen las longitudes de dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos.



Sea el triángulo oblicuángulo:



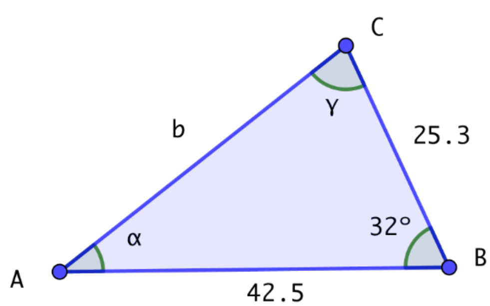
La ley de cosenos se enuncia con las ecuaciones:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

Ejemplo 11.

Determina las longitudes y ángulos faltantes en el siguiente triángulo oblicuángulo.



Datos:

Lados	Ángulos
a = 25.3	α = ¿?
b = ¿?	β = 32°

Solución:

Dado que se conocen las longitudes de dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos, se debe utilizar la ley de cosenos para determinar los datos faltantes.

El planteamiento de la ley de cosenos con los datos, se obtiene:

$b^2 = (25.3)^2 + (42.5)^2 - 2(25.3)(42.5)\cos 32°$

$b^2 = 640.09 + 1806.25 - (2150)(0.8480)$

$b^2 = 640.09 + 1806.25 - 1823.624$

$b^2 = 622.716$

$b = \sqrt{622.716}$

$b = 24.95$

Ahora de la ecuación $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, se despeja a $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Se sustituyen los datos:

$$\cos\alpha = \frac{(24.95)^2 + (42.5)^2 - (25.3)^2}{2(24.95)(42.5)}$$

$$\cos\alpha = 0.8435$$

Aplicamos la operación inversa:

$\alpha = \cos^{-1}(0.8435)$

$\alpha = 32.5°$

Con la información obtenida, se aplica el teorema de los ángulos internos en todo triángulo:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$32.5° + 32° + \gamma = 180°$$

$$\gamma = 180° - 32.5° - 32$$

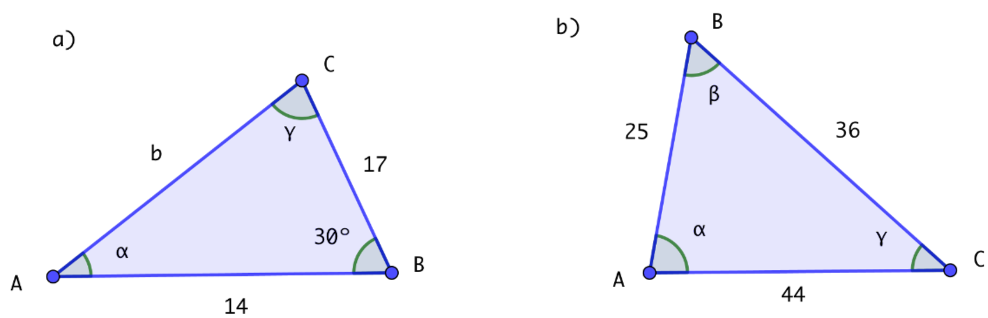
$$\gamma = 115.5°$$

Solución:

Lados	Ángulos
a = 25.3	α = 32.5º
b = 24.95	β = 32º
c = 42.5	γ = 115.5º

Ejercicio 10:

Determina el valor de las longitudes y ángulos faltantes en cada triángulo oblicuángulo.



Ejercicio 11:

Resuelve aplicando la ley de cosenos

a) Una montaña separa los puntos A y B. El punto más alto de la montaña es C y la distancia AC = 320 m, la distancia CB = 250 m y el <ABC = 60º. Obtén la distancia AB.
b) Un terreno está limitado por tres calles que se cortan. Los lados del terreno miden 312 m, 472 m y 511 m. Halla los ángulos formados por las calles al cortarse.

Respuestas a los ejercicios

Ejercicio 1

a) Hipotenusa = m, cateto opuesto = a

b) Hipotenusa = o, cateto opuesto = m
c) Hipotenusa = w, cateto opuesto = h

Ejercicio 2

a) $\sin M = \frac{4}{5}, \cos M = \frac{3}{5}, \tan M = \frac{4}{3}, \cot M = \frac{3}{4}, \sec M = \frac{5}{3}, \csc M = \frac{5}{4}$
b) $\sin B = \frac{24}{25}, \cos B = \frac{7}{25}, \tan B = \frac{24}{7}, \cot B = \frac{7}{24}, \sec B = \frac{25}{7}, \csc B = \frac{25}{24}$
c) $\sin R = \frac{47}{c}, \cos R = \frac{b}{c}, \tan R = \frac{47}{b}, \cot R = \frac{b}{47}, \sec R = \frac{c}{b}, \csc R = \frac{c}{47}$

Ejercicio 3

a) A = 40.54º
b) B = 56.25º
c) C = 60.25º
d) D = 53.13º
e) E = 41.81º

Ejercicio 4

a) La distancia del faro a la embarcación es de 117.8 m
b) La medida del ángulo es de 11.54º
c) a. El lado del pentágono mide 5.88 cm
   b. El perímetro es de 29.4 cm
   c. El área es de 59.46 cm^2
d) El radio mide 0.65 m

Ejercicio 5

a) Se puede representar en términos de $\cos \alpha$
b) Se puede representar en términos de $\cos \alpha$

Ejercicio 6

a) Se puede representar en términos de $\sin \alpha$
b) Se puede representar en términos de $\sin \alpha$

Ejercicio 7

a) La identidad se verifica
b) La identidad se verifica
c) La identidad se verifica

Ejercicio 8

a) a = 70.04, b = 58.01, γ = 71º
b) c = 51.88, α = 57.16º, γ = 53.83º

Ejercicio 9

a) a. La distancia de un pico a otro es de 836.2 m

b. La altitud de la cumbre de la montaña más alta es de 5468.4 m

b) a. La distancia entre A y P es de 1.6 millas

b. La altura de la montaña es de 0.6 millas

Ejercicio 10

a) b = 8.53 , α = 94.86º , γ = 55.14º
b) α = 54.9º β = 90.48º , γ = 34.62º

Ejercicio 11

a) La distancia AB es de 291.38 m
b) Los ángulos formados por las calles al cortarse son: 64.81º, 36.78º y 78.45º

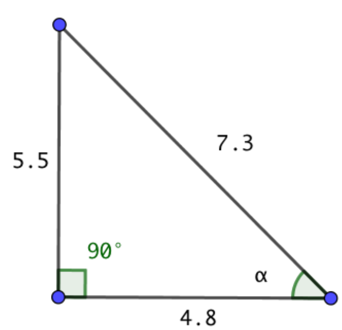
Autoevaluación

- En hojas a parte escribe el desarrollo de tus respuestas.
- Compara tus respuestas con las que vienen al final, para que observes tu avance.

1. ¿Cuál es la razón recíproca de la tangente?

a) $\sin x \cdot \cos x$ b) $\frac{\sin x}{\cos x}$ c) $\tan^{-1} x$ d) $\cot x$

2. En el triángulo de la figura, ¿cuánto vale $\sin \alpha$?



a) $\frac{4.8}{5.5}$

b) $\frac{5.5}{7.3}$

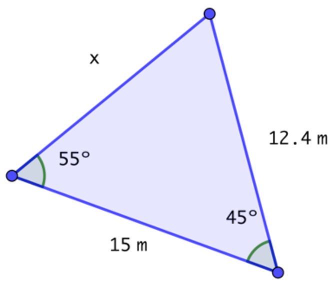
c) $\frac{5.5}{7.3}$

1

3. La sombra que proyecta un poste, sobre el suelo, mide 2.30 m, cuando el ángulo de elevación es de 49º. ¿Cuál es la altura del poste?

a) 1.51 m b) 1.74 m c) 2.64 m d) 3.04 m

4. Obtén el valor de la longitud x.



a) 9.2 m

b) 11.5 m

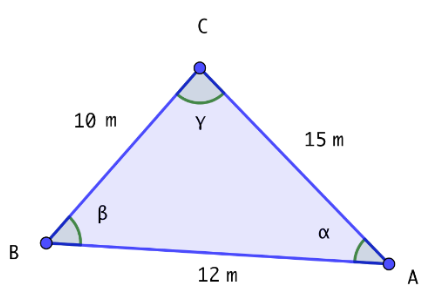
c) 8.6 m

5. Al simplificar la siguiente expresión se obtiene:

$$\frac{\tan\theta + \sec\theta}{\cos\theta}$$

a) $\sin\theta + 1$ b) $\frac{1}{1-\sin\theta}$ c) $1 - \sin\theta$ d) $\tan\theta$

6. Determina el valor del ángulo α



a) $\alpha = 52.77°$

b) $\alpha = 85.56°$

c) $\alpha = 41.67°$

d) $\alpha = 90.65°$

Respuestas

1	2	3	4	5	6
d	b	c	d	b	c

Bibliografía

Swokowsky, E. y Cole, J. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: CENGAGE Learning.

Barrera, F. et al. (2006). *Trigonometría, Teoría y ejercicios*. 2006: UNAM.

Guillen, J. et al. (2016). *Matemáticas III*. México: CCH, UNAM.

Rees, P. y Sparks, F. (1984). *Trigonometría*. México: Reverté

Unidad 2. Elementos básicos de geometría analítica

Presentación.

La geometría analítica estudia los objetos geométricos a través del álgebra. En tu curso de Matemáticas se ve la geometría plana es decir, la que corresponde a dos dimensiones, y se encarga de dos situaciones, una representa geométricamente ecuaciones de dos variables y la otra es encontrar la ecuación de una curva con ciertas propiedades, y para esto es importante conocer los sistemas de coordenadas, en particular en este capítulo estudiarás el sistema de coordenadas cartesiano el cual nos permite representar puntos y ver la forma de la curva generada por alguna ecuación algebraica.

Las coordenadas fueron introducidas por Descartes y Fermat en el siglo XVII. El uso de coordenadas permitió resolver múltiples problemas geométricos por medio del álgebra.

Con el estudio de esta unidad manejarás algunos conceptos básicos de la geometría euclidiana que te servirán para el estudio de la geometría analítica.

A lo largo de la unidad se te presentan ejemplos resueltos y una serie de ejercicios con sus respuestas, es importante para tu comprención que tengas un cuaderno exclusivamente para la solución de los ejercicios y siempre compara tus resultados con los de la guía.

Al finalizar el estudio de esta unidad lograrás los siguientes aprendizajes:

- ✓ Representación de puntos en el plano cartesiano.
- ✓ Conocer las condiciones necesarias y suficientes para localizar un segmento en el plano cartesiano.
- ✓ Determinar la longitud de un segmento dados sus puntos extremos.
- ✓ Localizar un segmento dadas condiciones necesarias y suficientes.
- ✓ Comprender el concepto de ángulo de inclinación.
- ✓ Calcular el ángulo de inclinación.
- ✓ Obtener las coordenadas de los puntos que dividen un segmento en una razón dada. Localiza los puntos de división de un segmento.
- ✓ Obtener la expresión algebraica de un lugar geométrico.
- ✓ Graficar un lugar geométrico.

Bibliografía de consulta.

Barnett, A. (1992). *Precálculo. Álgebra, Geometría Analítica y Trigonometría*. México: Limusa.

Johnson,L., Steffensen, Arnold R. (2009). *Älgebra y Trigonometría con Aplicaciones.* México: Trillas.

Leithold,L., (1999), *Álgebra y trigonometría con Geometría Analítica.* México: Oxford University Press.

Smith, S., et al (2001). *Álgebra*, *Trigonometría y Geometría Analítica*. México: Addison

Wesley.

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* México: Cengage Learning.

Diccionario ilustrado de conceptos matemáticos - Efraín Soto Apolinar
wordpress.colegio-arcangel.com/matematicas/files/2012/10/DICM.pdf

Conceptos clave.

- **Plano cartesiano:** Plano que utiliza un sistema de coordenadas cartesiano (rectangulares) para determinar las coordenadas de los puntos.
- **Sistema de coordenadas cartesiano:** Conjunto de ejes perpendiculares que sirven para representar las coordenadas de los puntos.
- **Coordenadas:** Son un par de números "x" , "y" que indican la ubicación de un punto en el plano, estos valores se ubican en los ejes coordenados para dar la ubicación los puntos $P(x, y)$ en el plano.
- **Punto en un plano:** Objeto geométrico que no tiene dimensiones y se usa para representar una ubicación en el plano o en el espacio.
- **Segmento:** Recta que tiene principio y fin con sus puntos extremos. Es un intervalo de recta delimitado por dos puntos fijos .
- **Distancia**: Espacio que existe entre dos puntos.
- **Distancia entre dos puntos:** Longitud de un segmento. Es un valor positivo.
- **División de un segmento en una razón dada:** Dado el segmento AB y un punto P en el mismo, la razón de división del segmento es el cociente $AP/_{PB}$
- **Punto medio:** Punto que se encuentra a la misma distancia de los extremos de un segmento.
- **Inclinación de un segmento:** Esta dada por la tangente del ángulo que se forma entre el segmento y el eje de las abscisas.
- **Angulo entre segmentos:** Figura delimitada por dos segmentos que se unen en un punto llamado vértice.
- **Área de un polígono:** Superficie que delimita una figura geométrica y se mide en unidades cuadradas.
- **Lugar geométrico:** Conjunto de puntos en el plano xy que cumplen con ciertas condiciones dadas.

Plano de Coordenadas Cartesiano.

Un **sistema de coordenadas cartesiano** o sistema rectangular está formado por dos rectas perpendiculares que se cortan en un punto "O" llamado origen.

Estas rectas perpendiculares se llaman ejes de coordenadas. El eje horizontal se conoce como el **eje de las abscisas** y el vertical como el **eje de las ordenadas**.
Este sistema coordenado divide al plano en cuatro partes llamadas **cuadrantes**, los cuales se representan con números romanos y se cuentan contra las manecillas del reloj iniciando en la parte superior derecha.

Eje de las ordenada

Cuadrante II Cuadrante I

Eje de las abscisas

Cuadrante III Cuadrante IV

Fig. 1 Plano Cartesiano

Punto en el plano cartesiano.

Un punto se representa con letras mayúsculas por ejemplo: $A, B, C, D, E, F, L, M, P$.
Para localizar un punto P en el plano, es necesario conocer sus coordenadas, las cuales se representan con las letras x, y. Siempre se representa primero el valor “x” que se buscará en el eje de las abscisas y enseguida el valor “y” que se encontrará en el eje de las ordenadas. $\boldsymbol{P(x, y)}$.
Al tener ubicados los valores de “x” y de “y” en los ejes respectivos, el punto se encontrará en la intersección de dos rectas perpendiculares a cada eje que pasan por los valores “x” y “y”.

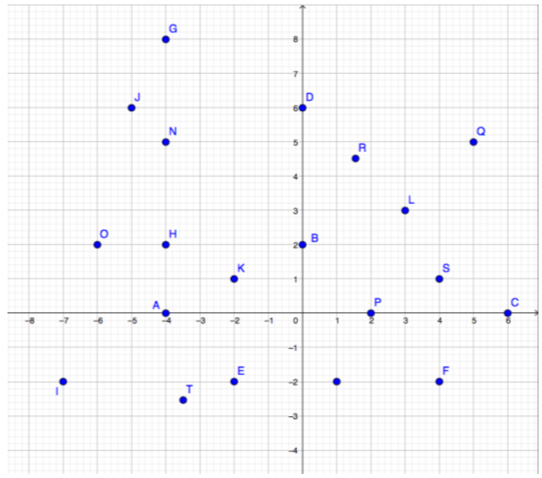


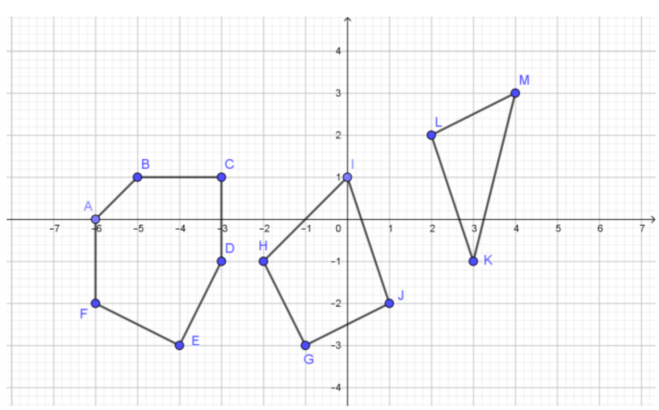
Fig. 2 Representación de puntos en el plano

De los puntos del diagrama anterior, podemos observar como son los signos de las coordenadas de éstos en los diferentes cuadrantes.

Cuadrante	x	y
Cuadrante I	positivo	positivo
Cuadrante II	negativo	positivo
Cuadrante III	negativo	negativo
Cuadrante IV	positivo	negativo

Ejercicios.

1.- Para las siguientes figuras indica en que cuadrante se encuentran sus vértices y da las coordenadas de los mismos.



2.- Traza la figura determinada por las coordenadas de los siguientes puntos: $A(1,3), B(3,4), C(8,5), D(9,7), E(9,15), F(10,19), G(11,22), H(13,23), I(15,24), J(13,22)$, $K(13,19), L(15,15), M(16,12), N(17,7), Ñ(18,5), O(22,4), P(25,3), Q(22,2), R(17,1)$, $S(9,1), T(3,2), A(1,3)$.

Une con rojo los puntos: $C(8,5), U(11,4), V(15,4),$ Ñ(18,5), aparte también los puntos: $D(9,7), W(11,6), Z(15,6), N(17,7)$.

Respuestas:
1.- $A(-6,0); B(-5,1); C(-3,1); D(-3,-1); E(-4,-3); F(-6,-2); G(-1,-3);$

$H(-2,-1);\ I(0,1);\ J(1,-2);\ K(3,-1); L(2,2); M(4,3)$.
Los puntos L, M se encuentran en el primer cuadrante, B, C en el segundo, D, E, F, G, H están en el tercer cuadrante y los puntos J, K en el cuarto cuadrante. Los puntos A, I se encuentran sobre los ejes, el primero en el eje de las abscisas y el segundo en el eje de las ordenadas.

Figura obtenida al graficar los puntos indicados:

Segmento Rectilíneo en el Plano Cartesiano.

Un segmento es una porción de una recta que está limitado por dos puntos llamados extremos y se representa: AB
¿Qué información se necesita para poder trazar un segmento?
Observa los siguientes ejemplos que representan segmentos que cumplen con una condición dada:

a) Segmentos con uno de sus extremos en el punto $A(2,3)$

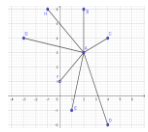
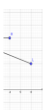


Fig.3. Segmentos dado un punto



b) Segmentos que miden tres unidades

Fig. 4 Segmentos de magnitud conocida

c) Segmentos que forman un ángulo de 45^0 respecto al eje de las abscisas

Fig. 5 Segmentos de inclinación conocida

Como habrás notado con sólo una de estas condiciones, no puedes trazar un segmento único.

¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para localizar un segmento en el plano? ____

Tienes dos maneras de trazar un segmento en el plano, una es si conoces sus puntos extremos, la segunda es si tienes como información uno de sus extremos, la longitud del segmento y el ángulo que forma éste con el eje de las abscisas.

Ejercicios.

1.- Traza en el plano los siguientes segmentos:

a) $A(-4,0), B(0,2)$

b) $C(6,0), D(0,6)$

c) $E(-2,-2), F(4,-2)$

d) $G(-4,8), H(-4,2)$

e) $I(-6,0), J(-8,-8)$

2.- Traza el segmento de recta que cumpla las siguientes condiciones:

a) Uno de sus extremos es el punto $A(-4,8)$, forma un ángulo de 90^ocon el eje de las abscisas y mide 10 unidades.

b) El punto $B(2,-2)$ es uno de sus extremos, forma un ángulo de 45^o con el eje de las "x" y mide 17 unidades

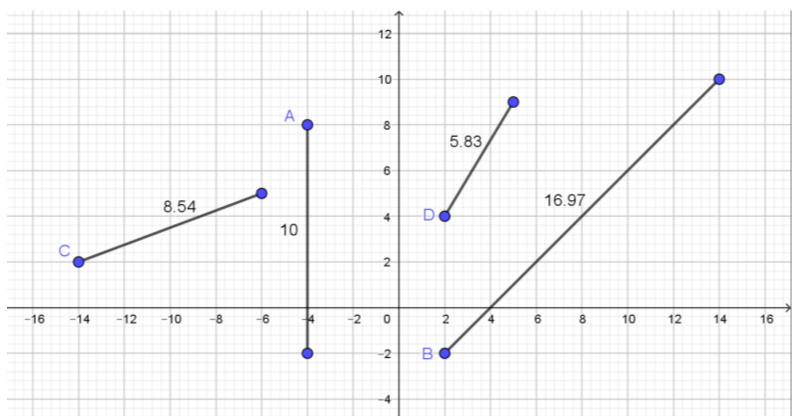
c) El punto $C(-14,2)$ es uno de sus extremos, forma un ángulo 20^o y mide 8.5 unidades

d) Uno de sus extremos es el punto $D(2,4)$, forma un ángulo de 60^o con el eje de las abscisas y mide 6 unidades

Respuestas.

Las respuestas del ejercicio (1) se encuentran en el apartado correspondiente a la distancia entre dos puntos

El diagrama corresponde a las respuestas del ejercicio (2)



Longitud de un segmento

Para obtener la longitud de un segmento, necesitamos conocer la distancia entre los puntos extremos del segmento. Si el segmento es paralelo a los ejes; basta restar las abscisas (coordenadas "x") si el segmento es paralelo al eje "x", y si es paralelo al eje "y" se restarán las ordenadas (coordenadas "y") de los puntos.

$d = x_2 - x_1$ para un segmento paralelo al eje de las abscisas

$d = y_2 - y_1$ para un segmento paralelo al eje de las ordenadas

Distancia entre dos puntos en el plano.

Para encontrar la distancia entre dos puntos $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ se usará la figura 6:

Con los dos puntos A y B podemos construir un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden: $y_2 - y_1$; $x_2 - x_1$.

En el triángulo rectángulo podemos aplicar el Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$ donde a, b son los catetos y c la hipotenusa. En el diagrama tenemos que los catetos miden: $a = x_2 - x_1, b = y_2 - y_1$ y la hipotenusa "c" corresponde a la distancia entre los puntos A, B.

$d_{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

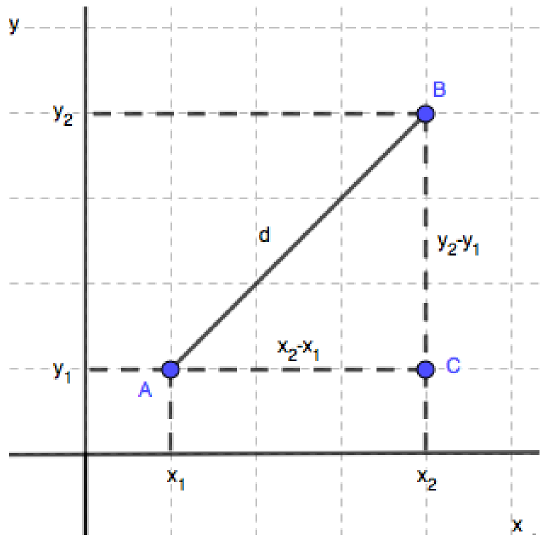


Fig. 6 Esquema para la distancia entre puntos.

Al obtener la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación tenemos:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo: Calcular la distancia entre los puntos $A(2,1)$ y $B(7,5)$.

$$d_{AB} = \sqrt{(7-2)^2 + (5-1)^2}$$
$$d_{AB} = \sqrt{(5)^2 + (4)^2}$$
$$d_{AB} = \sqrt{25 + 16}$$
$$d_{AB} = \sqrt{41}$$
$$d_{AB} = 6.403u$$

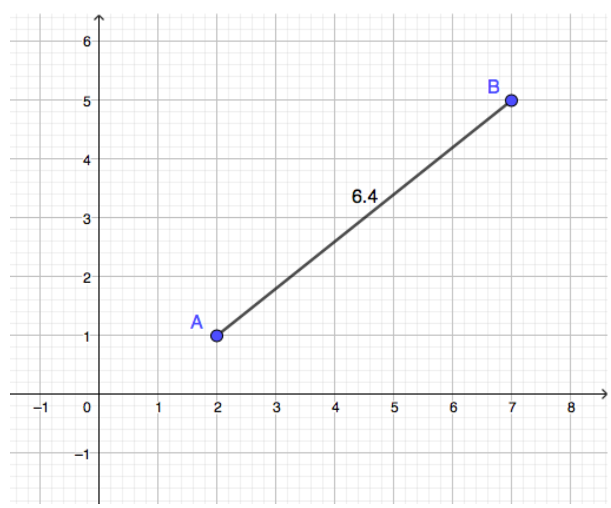


Fig. 7 La distancia entre los puntos A y B es 6.403 unidades.

Ejercicios.

Calcula la longitud de los siguientes segmentos:

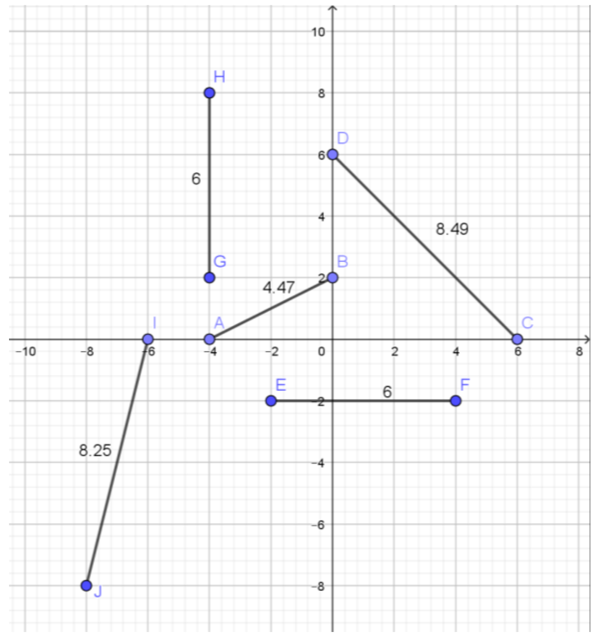
a) $A(-4{,}0), B(0{,}2)$

b) $C(6{,}0), D(0{,}6)$

c) $E(-2,-2), F(4,-2)$

d) $G(-4{,}8), H(-4{,}2)$

e) $I(-6{,}0), J(-8,-8)$



Respuestas.

a) $d_{AB} = 4.472u$; b) $d_{CD} = 8.485u$;

c) $d_{EF} = 6u$; d) $d_{GH} = 6$u;

e) $d_{IJ} = 8.246u$.

División de un segmento en una razón dada.

Una razón sirve para comparar que tan grande es una parte del segmento con respecto al resto. Se representa por la letra “r” y está dada por un cociente.

En la figura 8 tienes el segmento $\overline{AE}$ dividido en cuatro partes iguales: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DE}$.

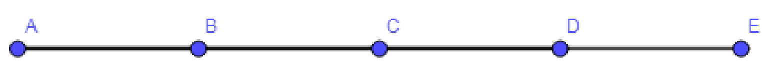


Fig. 8 Segmento dividido en cuatro partes iguales.

Puedes comparar el tamaño del tramo $\overline{AB}$, con el resto $\overline{BE}$, la razón dada es:

$$r = \frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} = \frac{1}{3}$$

Este valor te indica que el segmento $\overline{AB}$ es la tercera parte del segmento $\overline{BE}$.
Si ahora comparas el segmento $\overline{AC}$ con el segmento $\overline{CE}$, los segmentos son iguales:

$$r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{2}{2} = 1$$

¿Qué ocurre si se compara el segmento $\overline{AD}$ con el segmento $\overline{DE}$?

$$r = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \frac{3}{1} = 3$$

El segmento $\overline{AD}$ mide el triple del segmento $\overline{DE}$.

Punto que divide un segmento en una razón dada.

En el diagrama de la figura 9 tienes trazado un segmento cuyos extremos son los puntos $J(x_1, y_1)$ y $K(x_2, y_2)$ y un punto cualquiera $P(x, y)$. Este punto P divide al segmento en la razón:

$$r = \frac{\overline{JP}}{\overline{PK}}$$

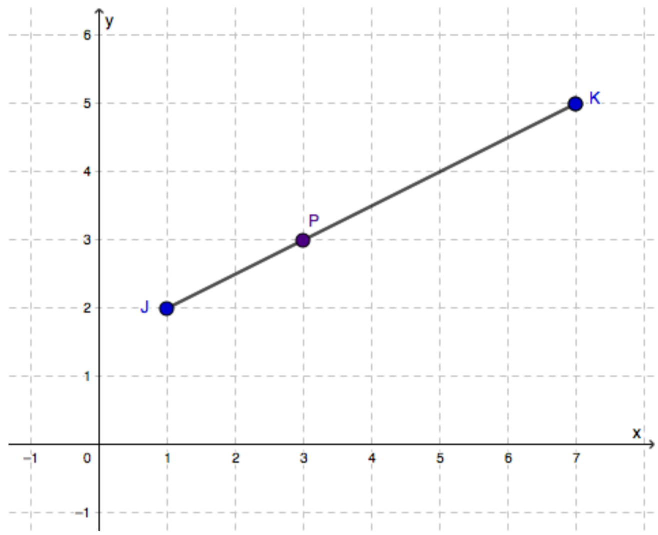


Fig. 9 Segmento dividido en una razón dada.

Las proyecciones del segmento sobre ambos ejes conservan la misma proporción, de tal manera que las proyecciones sobre el eje de las abscisas son:

$$r = \frac{(\overline{JP})_x}{(\overline{PK})_x}$$

$$r = \frac{\mathrm{x} - \mathrm{x}_1}{\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}}$$

Al despejar a la variable "x" se obtiene:

$$r(x_2 - x) = x - x_1$$
$$rx_2 - rx = x - x_1$$
$$-rx - x = -rx_2 - x_1$$
$$-x(r + 1) = -rx_2 - x_1$$

$$x = \frac{rx_2 + x_1}{r + 1}$$

De la misma manera se obtiene la variable "y":

$$y = \frac{ry_2 + y_1}{r + 1}$$

Las coordenadas del punto que divide a un segmento en una razón dada son:

$$\left(\frac{rx_2 + x_1}{r + 1}, \frac{ry_2 + y_1}{r + 1}\right)$$

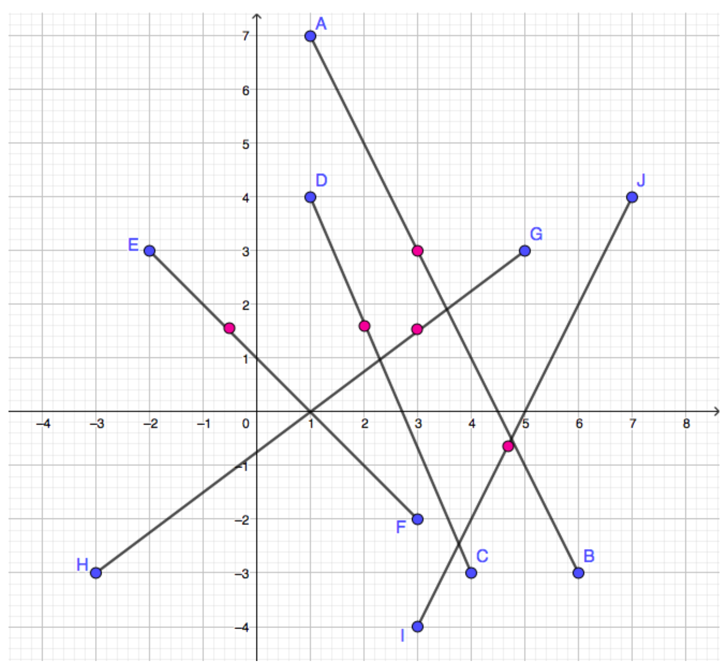
Ejercicios

1.- Encontrar las coordenadas de un punto que divida el segmento $\overline{AB}$ en la razón "r"

a) $A(1,7), B(6,-3);\ r = {}^{2}/_{3}$
b) $C(4,-3), D(1,4);\ r = 2$
c) $E(-2,3), F(3,-2);\ r = {}^{2}/_{5}$
d) $G(5,3), H(-3,-3);\ r = {}^{1}/_{3}$
e) $I(3,-4), J(7,4);\ r = {}^{5}/_{7}$

2.- Los extremos de un segmento son los puntos A, B Hallar la razón $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$ en que el punto "P" divide al segmento.

a) $A(7,4), B(-1,-4);\ P(1,-2)$
b) $C(6,-2), D(18,10);\ P(14,6)$
c) $E(-12,4), F(-4,8);\ P(-8,6)$
d) $G(6,0), H(0,6);\ P(4,2)$
e) $I(-18,16), J(-2,-8);\ P(-14,10)$

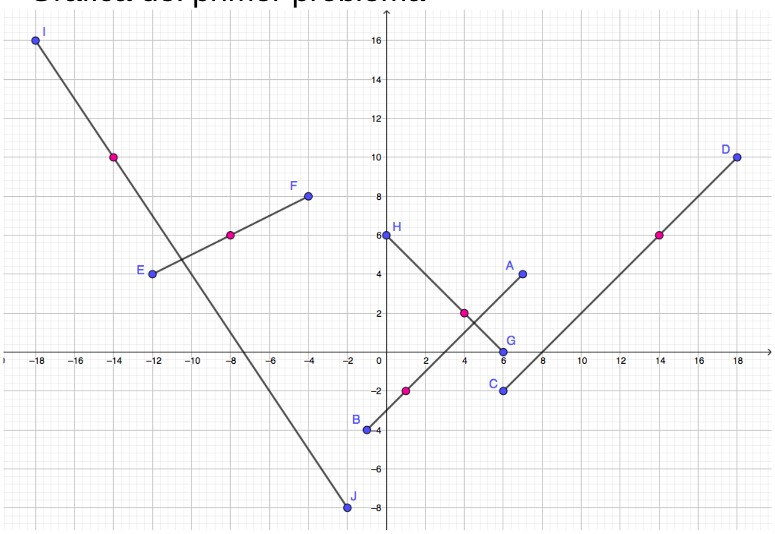


Respuestas:

1.- a) $P(3,3)$; b) $P\left(2,\frac{5}{3}\right)$;

c) $P\left(\frac{-4}{7},\frac{11}{7}\right)$; d) $P\left(3,\frac{3}{2}\right)$;
e) $P\left(\frac{14}{3},\frac{-2}{3}\right)$

Gráfica del primer problema



2.- a) $r=\frac{3}{1}=3$;

b) $r=\frac{2}{1}=2$;

c) $r=\frac{1}{1}$=1;

d) $r=\frac{1}{2}$;

e) $r=\frac{1}{3}$

Gráfica del segundo problema.

Punto Medio de un Segmento

En el ejemplo de la figura 8 vista anteriormente, se tiene que el segmento $\overline{AC}$ y el segmento $\overline{CE}$ son iguales lo que significa que "C" es el punto medio del segmento $\overline{AE}$ y la razón correspondiente es:

$$r=\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}=\frac{2}{2}=1$$

Así que si substituyes el valor $r=1$ en las coordenadas del punto que divide a un segmento en una razón dada: $\left(\frac{rx_2+x_1}{r+1}, \frac{ry_2+y_1}{r+1}\right)$, obtienes las coordenadas del punto medio de un segmento.
Para encontrar el punto medio de un segmento tenemos las expresiones:

La coordenada "x" del punto medio $x=(x_1+x_2)/2$

La coordenada "y" del punto medio $y=(y_1+y_2)/2$

Ejemplo: Encontrar el punto medio del segmento que une los puntos $A(2,1)$ y $B(7,5)$.

$$x = \frac{(x_1 + x_2)}{2} = \frac{2+7}{2} = \frac{9}{2}$$

$$y = \frac{(y_1 + y_2)}{2} = \frac{1+5}{2} = 3$$

Así el punto medio es:

$$P\left(\frac{9}{2}, 3\right)$$

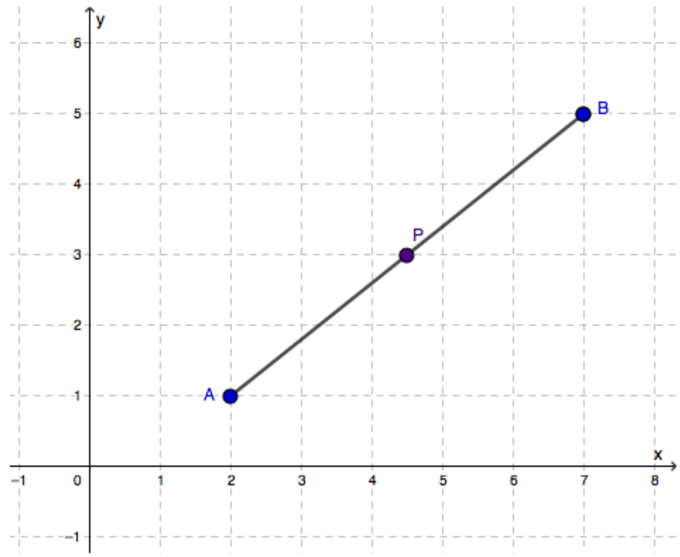


Fig. 10 Punto medio del segmento $\overline{AB}$

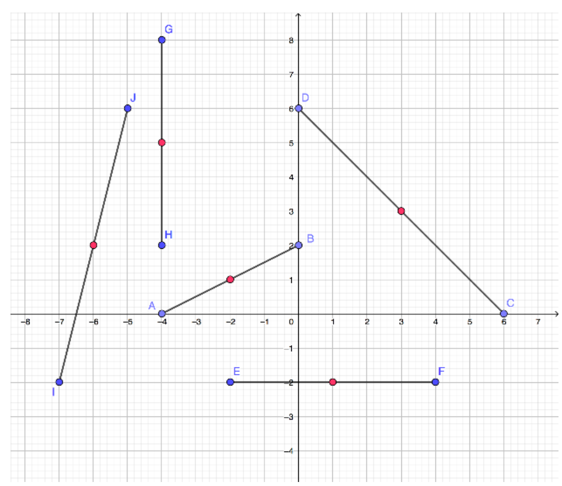
Ejercicios.

Calcular el punto medio de los siguientes segmentos:

a) $A(-4,0), B(0,2)$ b) $C(6,0), D(0,6)$

c) $E(-2,-2), F(4,-2)$ d) $G(-4,8), H(-4,2)$

e) $I(-7,-2), J(-5,6)$



Respuestas.

a) $P(-2,1)$; b) $P(3,3)$; c) $P(1,-2)$;

d) $P(-4,5)$; e) $P(-6,2)$

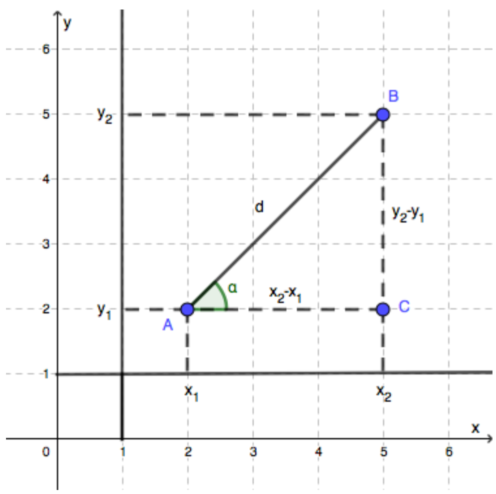
Inclinación de un segmento

Otro concepto importante que debes estudiar es el ángulo de inclinación, éste se considera como el ángulo que forma la recta con el eje de las abscisas. El ángulo se considera positivo cuando se mide en sentido contrario a las manecillas del reloj. Para encontrar este ángulo se usa la pendiente de la recta.

Si se tiene una recta y un punto $P(x, y)$ cualquiera en la recta, sus proyecciones a los ejes forman un triángulo rectángulo, en el que se tiene el ángulo de inclinación α

Pendiente de una recta

La pendiente de una recta se define como la tangente del ángulo de inclinación. Al conocer dos puntos $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ en la recta se puede conocer la pendiente de la misma, la cual se representa con la letra "m". En la figura observamos que formamos un triángulo rectángulo para el que definimos la tangente.



$$tg\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

De esta expresión obtenemos la pendiente de la recta:

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-y_1}$$

Fig. 11

La tangente del ángulo corresponde a la pendiente

Una recta horizontal tiene una pendiente igual a cero, una recta con pendiente igual a 1 forma un ángulo de 45^o con el eje de las abscisas, si la recta es vertical la pendiente no está definida. Cuanto menor sea el valor de la pendiente, la inclinación de la recta será menor.

Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente. Si las rectas son perpendiculares el producto de sus pendientes es -1. Cabe mencionar que si la pendiente es positiva, el ángulo se medirá en sentido contrario a las manecillas del reloj y si es negativa, se medirá en el mismo sentido del movimiento de las manecillas.

Ejercicios.

Calcular la pendiente de los siguientes segmentos:

a) $A(-4,0), B(0,2)$

b) $C(6,0), D(0,6)$

c) $E(-2,-2), F(4,-2)$

d) $G(-4,8), H(-4,2)$

e) $I(-7,-2), J(-5,6)$

Respuestas.

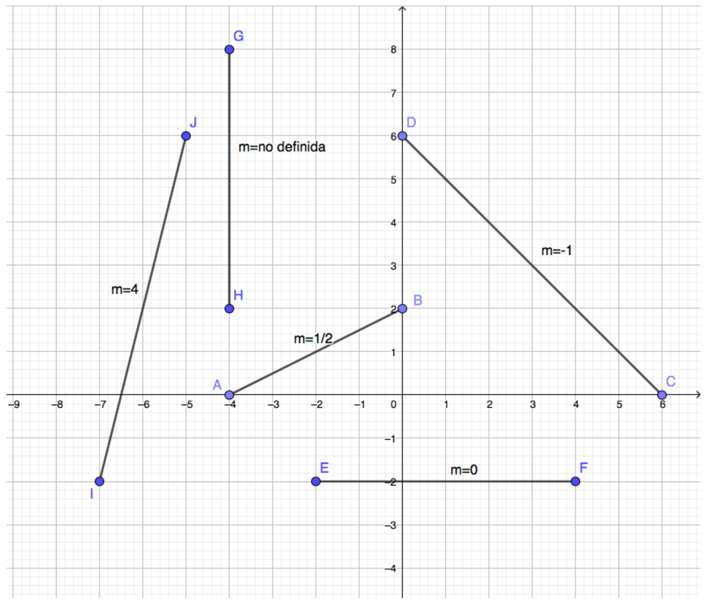
a) $m_{AB} = \frac{1}{2}$;

b) $m_{CD} = -1$;

c) $m_{EF} = 0$;

d) $m_{GH} = no\ definida$;

e) $m_{IJ} = 4$



Área de un polígono

Para encontrar el área de un polígono se tiene la siguiente expresión:

$$A = \frac{1}{2} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

El orden en que deben acomodarse los puntos en esta expresión es en contra del movimiento de las manecillas del reloj. Para resolver este determinante se multiplican los números en forma de diagonal: $x_1y_2; x_2y_3; \ldots . x_ny_1$; a los productos siguientes se les cambia el signo, $x_1y_n; \ldots .. x_3y_2; x_2y_1$

Ejemplo: Encontrar el área del triángulo que se forma con los siguientes puntos:

$R(5,2); S(3,-4); T(-7,-3).$

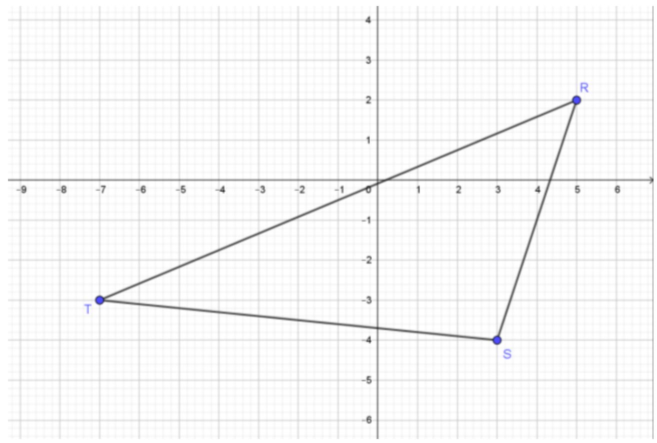
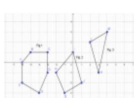


Fig. 12 Triángulo cuya área es: $\frac{67}{2}u^2$

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \\ -7 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(6-15+28+9+14+20)=\frac{1}{2}(67u^2)$$

Ejercicios.

Encuentra el área de las siguientes figuras:



Respuestas: $Figura1=\frac{35}{2}u^2$; $Figura2=\frac{13}{2}u^2$; $Figura\ 3=\frac{7}{2}u^2$

Ángulo entre segmentos.

Dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ para los cuales conoces sus pendientes y que forman un ángulo "α", puedes encontrar dicho ángulo con la siguiente expresión:

$$tan\alpha=\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}$$

Para poder utilizar esta fórmula es necesario que $m_2m_1\neq-1$. El ángulo se obtiene al calcular el ángulo cuya tangente es:

$$\alpha = ang\left(\frac{m_2 - m_1}{1 * m_2 m_1}\right)$$

Ejemplo: Obtener los ángulos del triángulo cuyos vértices son los puntos: $R(5,2); S(3,-4); T(-7,-3)$. Primero encontramos las pendientes de cada uno de los lados del triángulo.

$$m_{RT} = \frac{-3-2}{-7-5} = \frac{-5}{-12} = \frac{5}{12}$$

$$m_{TS} = \frac{-3-(-4)}{-7-3} = \frac{1}{-10}$$

$$m_{RS} = \frac{-4-2}{3-5} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Los ángulos se consideran positivos cuando siguen un movimiento contra las manecillas del reloj, así para el ángulo "α", el lado inicial es el segmento $\overline{RT}$, y el lado final es el segmento $\overline{RS}$, entonces para usar la fórmula para encontrar el ángulo, la pendiente dos corresponde al segmento final y la pendiente uno al segmento inicial.

$$tan\alpha = \frac{3 - {}^{5}/_{12}}{1 + (3)\left({}^{5}/_{12}\right)}$$

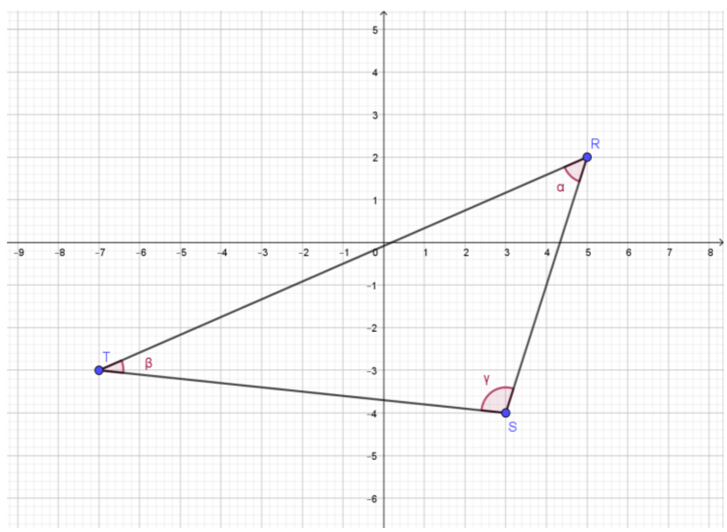


Fig. 13 Ángulos internos del triángulo

$$tan\alpha = \frac{{}^{31}/_{12}}{1 + {}^{15}/_{12}}$$

$$tan\alpha = \frac{{}^{31}/_{12}}{{}^{27}/_{12}}$$

$$tan\alpha = \frac{31}{27}$$

Para encontrar el valor del ángulo se tiene:

$$\alpha = angtan\frac{31}{27}$$

$$\alpha = 48.943^{o}$$

Para el ángulo "β", el lado inicial es el segmento $\overline{TS}$, y el lado final el segmento $\overline{TR}$, así para encontrar el ángulo se tiene:

$$tan\beta = \frac{{}^{5}/_{12} + {}^{1}/_{10}}{1 + \left({}^{5}/_{12}\right)\left({}^{-1}/_{10}\right)}$$

$$tan\beta = \frac{{}^{62}/_{120}}{1 - {}^{5}/_{120}}$$

$$tan\beta = \frac{{}^{62}/_{120}}{{}^{115}/_{120}}$$

$$tan\beta = \frac{62}{115}$$

El ángulo "β" es:

$$\beta = angtan\frac{62}{115}$$

$$\beta = 28.33^{o}$$

Para calcular el ángulo "γ" podemos usar la propiedad de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180^{o}:

$$\gamma = 180 - 48.943 - 28.33 = 102.727$$

$$\gamma = 102.727^{o}$$

Ejercicios.

1.- Encuentra los ángulos del triángulo cuyos vértices son los puntos:

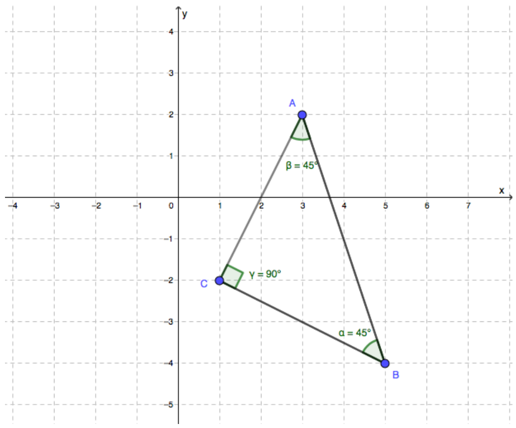
a) $A(3,2); B(5,-4); C(1,-2)$

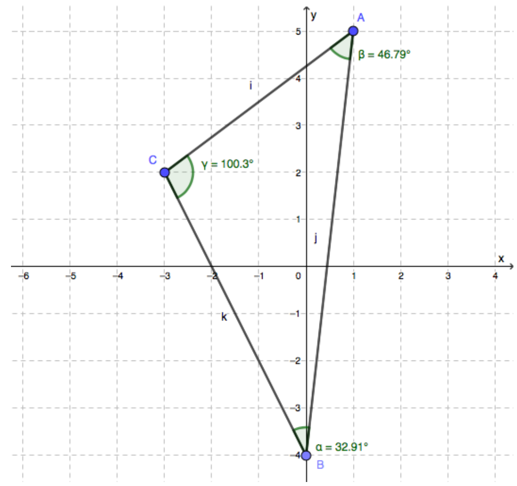
b) $A(-3,2); B(0,-4); C(1,5)$

Respuestas:

a) $\sphericalangle BAC = 45^{O}$, $\sphericalangle ABC = 45^{O}$, $\sphericalangle ACB = 90^{O}$

b) $\sphericalangle BAC = 46.79^{O}$, $\sphericalangle ABC = 32.91^{O}$, $\sphericalangle ACB = 100.3^{O}$





A continuación se presentan ejercicios adicionales que te ayudarán a aplicar los conceptos vistos en esta unidad. Para resolverlos es importante que tomes en cuenta las siguientes consideraciones:

Recuerda que para entender mejor los problemas es importante siempre graficar los puntos indicados en cada caso.

Si no conoces algún concepto o no lo recuerdas, busca primero esa información, por ejemplo que significan puntos colineales, que es un paralelogramo, que características tiene un triángulo isósceles, como se define en triángulo rectángulo.

Debes tener orden y limpieza en tu trabajo para que te sirva posteriormente como un cuaderno de repaso, para futuras dudas.

Ejercicios.

1.- Probar si son colineales los siguientes puntos:

a) $A(4,7), B(-1,3), C(-6,-1)$
b) $D(-1,-3), E(0,-1), F(1,1)$
c) $G(1,-3), H(4,3), I(7,7)$
d) $J(-8,2), K(-5,3), L(1,5)$

2- Probar si los siguientes puntos son vértices de un paralelogramo:

a) $A(-8,2), B(2,-2), C(5,3), D(-6,5)$
b) $E(-1,-1), F(2,0), G(4,2), H(1,1)$
c) $I(4,1), J(3,5), K(-1,4), L(0,0)$

3.- Comprueba si los siguientes puntos son los vértices de un cuadrado:

a) $A(2,1), B(-1,2), C(-2,-1), D(1,-2)$
b) $E(4,0), F(2,2), G(4,4), H(6,2)$

c) $I(-4,-5), J(-4,-1), K(0,-3), L(0,-7)$

4.- Probar que el punto $O(-2,-3)$ es el centro de la circunferencia que pasa por los puntos: $A(-6,1), B(2,1), C(-6,-7)$

5.- Verifica si las rectas que pasan por cada par de puntos son paralelas o perpendiculares o si no cumplen con alguna de estas dos situaciones.

a) $A(1,-1), B(2,4)\ y\ C(-3,-2), D(-2,3)$
b) $E(-6,1), F(-2,-1)\ y\ G(-1,1), H(-5,2)$
c) $I(2,3), J(6,-1)\ y\ K(5,4), L(2,1)$
d) $M(-3,-3), N(4,0)\ y\ O(-2,-4), P(5.-1)$

6.- Calcula el ángulo de inclinación de los siguientes segmentos:

a) a) $A(1,-1), B(2,4)$
b) $C(-6,1), D(-2,-1)$
c) $E(6,4), F(3,1)$
d) $G(-2,-4), H(5,-1)$

7.- Verifica si los siguientes triángulos son rectángulos:

a) $A(-7,2), B(2,4), C(-1,,-1)$
b) $D(-2,1), E(1,-2), F(7,3)$
c) $G(1,-1), H(8,6), I(-3,3)$
d) $J(-2,2), K(8,-4), L(-5,-3)$

8.- Verifica si los siguientes triángulos son isósceles:

a) $A(-4,3), B(-1,-1), C(3,2)$
b) $D(-1,-6), E(-6,4), F(5,2)$
c) $G(-2,5), H(5,5), I(6,-3)$
d) $J(-6,2), K(1,3), L(2,-4)$

9.- Dado el segmento cuyos extremos son los puntos $A(10,-3), B(14,-7)$, dar la razón en que cada uno de los siguientes puntos divide el segmento: a) $C(11,-4)$, b) $D(12,-5)$, c) $E(13,-6)$

10.- Para el segmento formado por los puntos $F(14,-2), G(2,-8)$, encuentra el punto que lo divide en la razón: a) $r=\frac{1}{5}$; b) $r=\frac{1}{2}$; c) $r=1$

Nota: Tres puntos A, B, C son colineales cuando los tres se encuentran en la misma línea recta, esto lo puedo comprobar calculando la distancia del punto “A” al punto "B" y luego del punto "B" al punto "C" enseguida calcular la distancia del punto "A" al "C". Si los puntos son colineales se debe cumplir que la suma de las primeras dos distancias es igual a la tercera:$d_{ab}+d_{bc}=d_{ac}$, esto será valido si los puntos se encuentran en el plano en el orden

A, B, C. Otra idea para resolver el problema es pensar que tres puntos forman un triángulo, el cual tiene un área, entonces si calculamos el "area del triángulo y ésta resulta ser cero esto nos indica que los puntos están alineados y por lo tanto son puntos colineales. También podemos pensar en el concepto de pendiente, ésta debe ser la misma para los segmentos AB, BC y AC; ésta idea se debe respaldar con la gráfica.

Para probar que los puntos forman un paralelogramo, se calcula la pendiente de cada uno de los segmentos, estas deben ser iguales dos a dos. También si medimos las distancias de los cuatro lados de la figura, estos serán iguales dos a dos; si la figura corresponde a un cuadrado las longitudes de los lados (distancias entre los puntos) serán iguales.

En otro problema hay que verificar que el punto "O" es el centro de una circunferencia, para esto hay que calcular la distancia a los puntos dados de la circunferencia y ver que sea la misma.

Para verificar que un triángulo es isósceles, es necesario calcular la longitud de los lados del triángulo y ver que dos sean iguales.

Para verificar que un triángulo es rectángulo lo podemos hacer de dos maneras, una sería calcular las pendientes de los lados del triángulo y ver que el producto de dos de ellas es -1 , lo que indica que esos lados son perpendiculares, lo que indica que los lados forman un ángulo de noventa grados y por lo tanto tendremos un triángulo rectángulo; la otra manera de probar que se tiene un triángulo rectángulo es calcular las longitudes de los lados y ver que se cumpla el Teorema de Pitágoras: La suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Respuestas a los ejercicios:

1.- a) $d_{AB} = 6.403$; $d_{BC} = 6.403$; ; $d_{AC} = 12.806$ los puntos son colineales b) $d_{DE} = 2.236$; $d_{EF} = 2.236$; $d_{DF} = 4.472$ los puntos son colineales c) $d_{GH} = 6.708$; $d_{HI} = 5$; $d_{GI} = 11.661$ los puntos son no colineales d) $d_{JK} = 3.162$; $d_{KL} = 6.324$; ; $d_{JL} = 9.486$ los puntos son colineales.

2.- a) $m_{AB} = \frac{2}{-5}$, $m_{BC} = \frac{5}{3}$, $m_{CD} = \frac{-2}{11}$, $m_{DA} = \frac{3}{2}$; como las pendientes son diferentes, la figura no es un paralelogramo b) $m_{EF} = \frac{1}{3}$, $m_{FG} = 1$, $m_{GH} = \frac{1}{3}$,$m_{HE} = 1$ como los segmentos son paralelos dos a dos la figura es un paralelogramo c) $m_{IJ} = -4$, $m_{JK} = \frac{1}{4}$,$m_{KL} = -4$,$m_{LI} = \frac{1}{4}$; la figura es un paralelogramo.

También se pueden calcular las distancias: a) $d_{AB} = 10.770$; $d_{BC} = 5.830$; $d_{CD} = 11.180$; $d_{DA} = 3.605$; la figura no es un paralelogramo b) $d_{EF} = 3.162$; $d_{FG} = 2.828$; $d_{GH} = 3.162$; $d_{HE} = 2.828$; la figura es un paralelogrmo c) $d_{IJ} = 4.123 =$; $d_{JK} = 4.123$; $d_{KL} = 4.123$; $d_{LI} = 4.123$; la figura es un paralelogramo.

3.- a)$d_{AB} = \sqrt{10}$; $d_{BC} = \sqrt{10}$; $d_{CD} = \sqrt{10}$; $d_{DA} = \sqrt{10}$; la figura es un cuadrado b) $d_{EF} = \sqrt{8}$; $d_{FG} = \sqrt{8}$; $d_{GH} = \sqrt{8}$; $d_{HE} = \sqrt{8}$; la figura es un cuadrado c) $d_{IJ} = 4$; $d_{JK} = \sqrt{20}$; $d_{KL} = 4$; $d_{LI} = \sqrt{20}$; la figura no es un cuadrado.

4.- $d_{AO} = \sqrt{32}$, $d_{BO} = \sqrt{32}$, $d_{CO} = \sqrt{32}$; como las tres distancias son iguales, el punto "O" es el centro de la circunferencia.

5.- a) $m_{AB} = 5$, $m_{CD} = 5$; esto indica que los segmentos $\overline{AB}\ y\ \overline{CD}$ son paralelos b) $m_{EF} = \frac{-1}{2}$, $m_{GH} = \frac{-1}{4}$; esto indica que los segmentos $\overline{EF} y\ \overline{GH}$ no cumplen condiciones para ser paralelos ni perpendiculares c) $m_{IJ} = -1$, $m_{KL} = 1$; esto indica que los segmentos $\overline{IJ}\ y\ \overline{KL}$ son perpendiculares porque el producto de las pendientes da -1 d) $m_{MN} = \frac{3}{7}$, $m_{OP} = \frac{3}{7}$; esto indica que los segmentos $\overline{MN}\ y\ \overline{OP}$ son paralelos

6.- a) $m_{AB} = 5$, $\alpha = tg(5) = 78.69^o$ b) $m_{CD} = -\frac{1}{2}$, $\beta = tg\left(-\frac{1}{2}\right) = -26.56^o$, medido contra las mancillas del reloj c) $m_{EF} = 1$, $\gamma = tg(1) = 45^o$ d) $m_{GH} = \frac{3}{7}$, $\delta = tg\left(\frac{3}{7}\right) = 23.19^o$

7.- a) $m_{AB} = \frac{1}{4}$, $m_{AC} = \frac{-1}{2}$, $m_{BC} = \frac{5}{2}$, como no hay rectas perpendiculares el triángulo es no rectángulo ; b) $m_{DE} = -1$, $m_{DF} = \frac{2}{9}$, $m_{EF} = \frac{5}{6}$, el triángulo es no rectángulo ; c) $m_{GH} = 1$, $m_{GI} = -1$, $m_{HI} = \frac{3}{11}$, se tienen rectas perpendiculares, así el triángulo es rectángulo ; d) $m_{JK} = \frac{-3}{5}$, $m_{JL} = \frac{5}{3}$, $m_{KL} = \frac{1}{-13}$, triángulo rectángulo

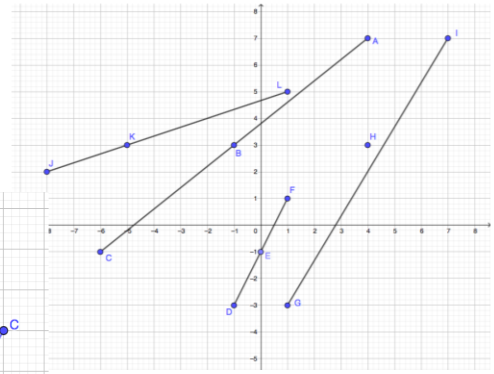
a) $d_{AB} = \sqrt{68}$; $d_{AC} = \sqrt{45}$; $d_{BC} = \sqrt{6}$, no se cumple el teorema de Pitágoras, por lo que el triángulo no es rectángulo; b) $d_{DE} = \sqrt{18}$; $d_{DF} = \sqrt{85}$; $d_{EF} = \sqrt{6}$, no es triángulo rectángulo; c) $d_{GH} = \sqrt{98}$; $d_{GI} = \sqrt{32}$; $d_{HI} = \sqrt{130}$, si se cumple el teorema, por lo que el triángulo es rectángulo; d) $d_{JK} = \sqrt{136}$; $d_{JL} = \sqrt{34}$; $d_{KL} = \sqrt{170}$, el triángulo es rectángulo .

8.- a) $d_{AB} = 5$; $d_{AC} = 7.071$; $d_{BC} = 5$, el triángulo es isósceles b) $d_{DE} = 11.18$; $d_{DF} = 10$; $d_{EF} = 11.18$, el triángulo es isósceles c) $d_{GH} = 7$; $d_{GI} = 11.313$; $d_{HI} = 8.06$, el triángulo no es isósceles d) $d_{JK} = 7.071$; $d_{JL} = 10$; $d_{KL} = 7.071$, el triángulo no es isósceles.

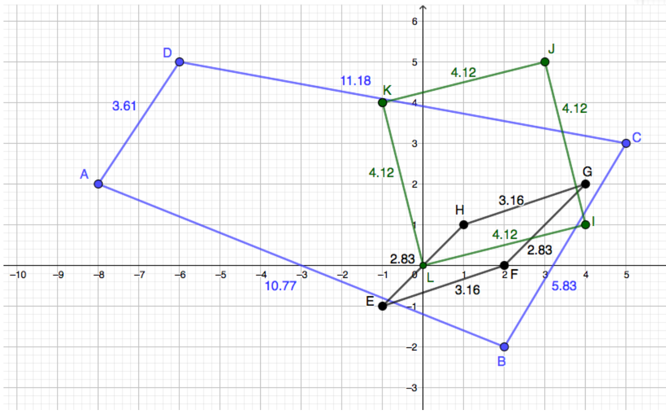
9.- a) $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \frac{1}{3}$, b) $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = 1$, c) $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = 3$

10.- a) $H(12, -3)$, b) $I(10, -4)$, c) $J(8, -5)$.

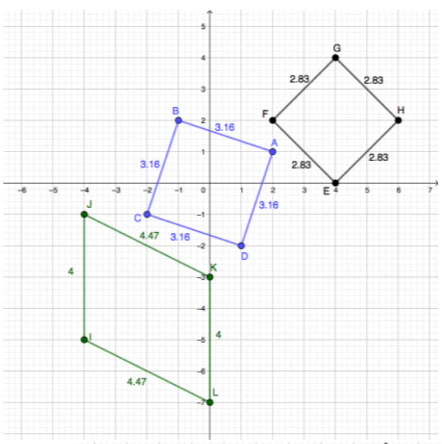
Gráficas correspondientes a los problemas adicionales.



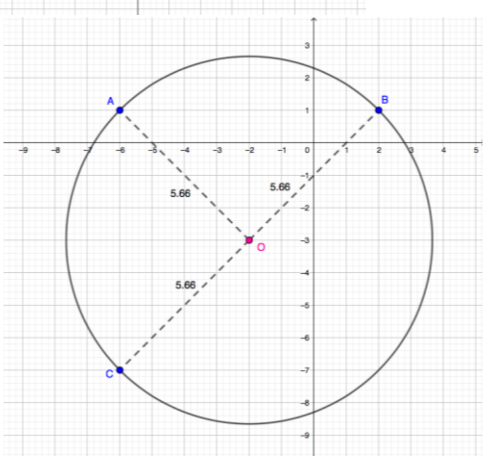
1.- Solamente los segmentos $\overline{AC}, \overline{DF}, \overline{JL}$, Tienen puntos alineados por lo que son segmentos colineales.



2.- La figura formada por los puntos A, B, C, D no es un paralelogramo porque sus lados no son paralelos, y sus pendientes son diferentes.

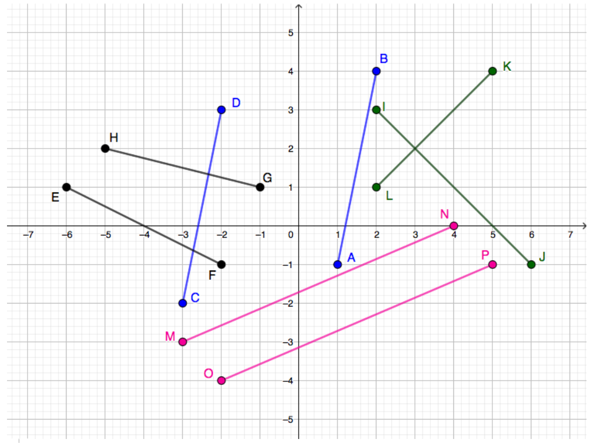


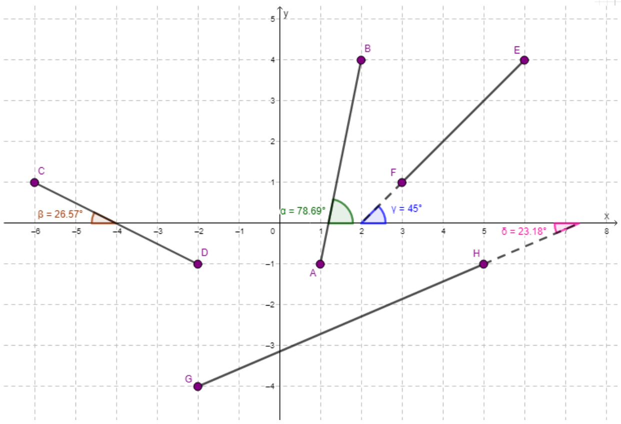
3.- La figura formada por los puntos I, J, K, L no es un cuadrado porque sus lados son de diferente magnitud.



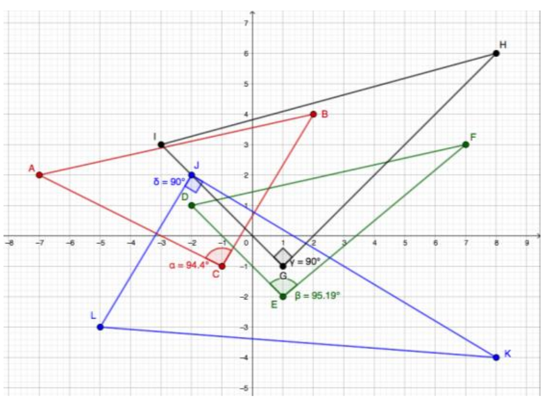
4.- El punto "O" es el centro de la circunferencia porque la distancia a los tres puntos es la misma.

5.- Los segmentos $\overline{AB}, \overline{CD}$ son paralelos; $\overline{EF}, \overline{GH}$, no cumplen las condiciones de segmentos paralelos ni perpendiculares; $\overline{IJ}, \overline{KL}$ son segmentos perpendiculares; $\overline{MN}, \overline{OP}$ son paralelos.

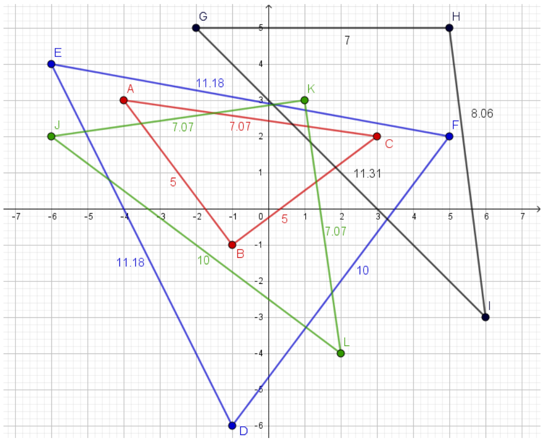




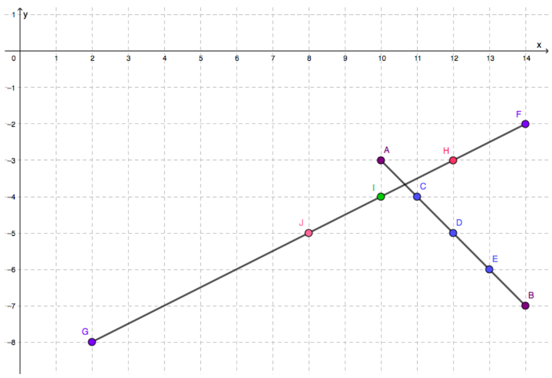
6.- En la gráfica se muestran los ángulos de cada segmento.



7.- Los triángulos que tienen un ángulo de noventa grados son los formados por los puntos: GHI, JKL.



8.- Los triángulos que son isósceles son los que tienen dos lados iguales, en este caso los formados por los puntos: A, B, C ; D, E, F; J, K, L.



9.- Los puntos C, D, E, dividen al segmento $\overline{AB}$ en la razón $r = \frac{1}{3}$; $r = 1$; $r = 3$ respectivamente.

10.- Los puntos:H, I, J dividen el segmento $\overline{FG}$ en la razones $r = \frac{1}{5}, r = \frac{1}{2}, r = 1$.

Lugar geométrico

Se llama lugar geométrico al conjunto de puntos en el plano que satisfacen una ecuación. La Geometría Analítica estudia los lugares geométricos utilizando las ecuaciones que los representan y también si se conoce un lugar geométrico se busca su ecuación.

Como primer caso tenemos, dada una ecuación, encontrar el lugar geométrico que representa.

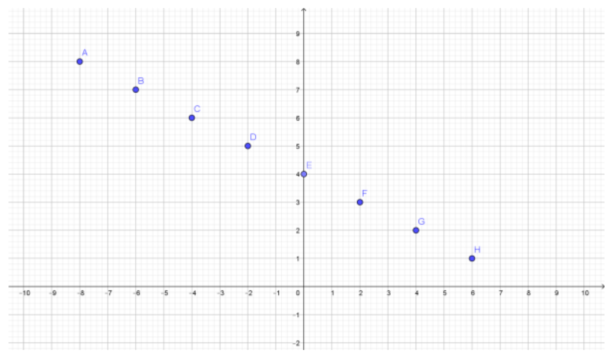
Ejemplos:

a) Obtener el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la ecuación $x + 2y = 8$

x	y	$x + 2y = 8$
-8	8	$-8 + (2)(8) = 8$
-6	7	$-6 + (2)(7) = 8$
-4	6	$-4 + (2)(6) = 8$

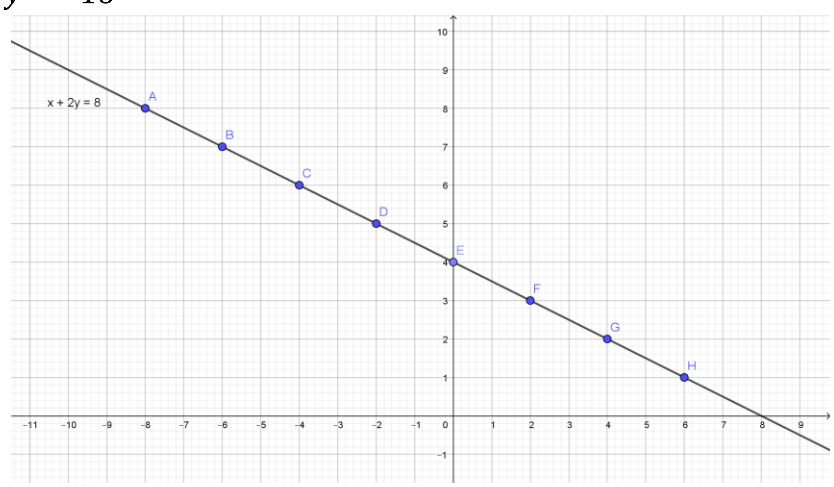
-2	5	$-2+(2)(5)=8$
0	4	$0+(2)(4)=8$
2	3	$2+(2)(3)=8$
4	2	$4+(2)(2)=8$
6	1	$6+(2)(1)=8$

Al graficar los puntos se tiene:



Como las variables “x” y “y” pertenecen al conjunto de números reales, para representar todos los valores que toman éstas debemos unir los puntos graficados.

b) Obtener el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la ecuación: $x^2+y^2=16$

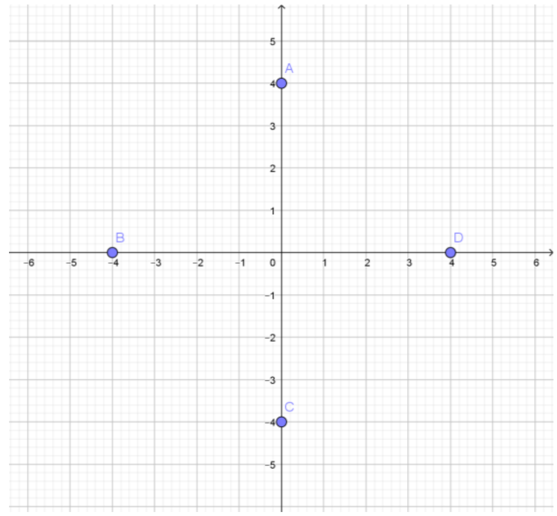


Algunas parejas de puntos que satisfacen esta ecuación son

x	y	$x^2+y^2=16$
-4	0	$-4^2+0^2=16$
0	-4	$0^2+(-4^2)=16$
0	4	$0^2+4^2=16$

4	0	$4^2 + 0^2 = 16$

Podemos graficar estos cuatro puntos que satisfacen la ecuación anterior.



Si despejas "y" de la ecuación queda:

$$y = \sqrt{16 - x^2}$$

De esta expresión podemos concluir que para que "y" tenga un valor real, los valores de la variable "x" están limitados al intervalo: $[-4,4]$ y los de la variable "y" también se encuentran en el intervalo: $[-4,4]$ la gráfica quedará:

c) Obtener el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la ecuación:

$$y = x^2 + 2x$$

Algunos puntos que cumplen la ecuación anterior son:

x	y	$y = x^2 + 2x$
-4	8	$8 = (-4)^2 + 2(-4)$
-3	3	$3 = (-3)^2 + 2(-3)$

-2	0	$0 = (-2)^2 + 2(-2)$
-1	-1	$-1 = (-1)^2 + 2(-1)$
0	0	$0 = (0)^2 + 2(0)$
1	3	$3 = (1)^2 + 2(1)$
2	8	$8 = (2)^2 + 2(2)$
3	15	$15 = (3)^2 + 2(3)$

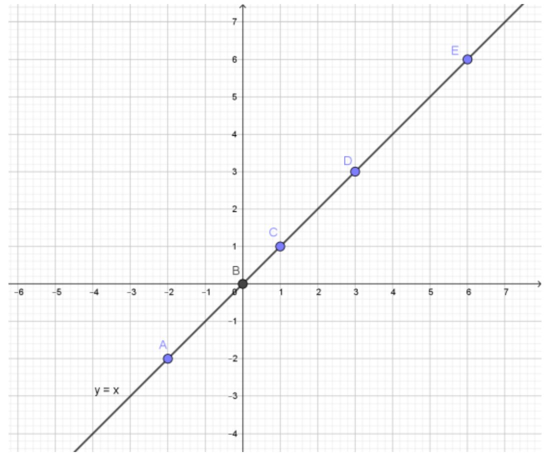
Como las variables “x” y “y” corresponden al conjunto de los números reales, la gráfica es:

El segundo caso a estudiar que se tiene es, dado un lugar geométrico que cumpla con ciertas condiciones, hallar su ecuación.

Ejemplos:

a) Determina la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano que cumplen con la condición de que su abscisa es igual a su ordenada. Con algunos puntos como ejemplo puedas graficar y obtener la ecuación.

$A(-2,-2), B(0,0), C(1,1), D(3,3), E(6,6)$, de aquí podemos decir que la ecuación es: $y = x$ y la gráfica correspondiente se encuentra a la derecha.



b) Determina la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano que cumple con la condición de encontrarse a nueve unidades del origen.

Si utilizas la fórmula para encontrar la distancia entre dos puntos cualesquiera, en este caso un punto $P(x, y)$ y el origen $O(0,0)$ obtienes:

$$d_{PO} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

$$9 = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

$$9 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Si elevas al cuadrado ambos lados de la ecuación obtienes:

$$81 = x^2 + y^2$$

Así que la ecuación de los puntos que cumplen con tener una distancia de nueve unidades al origen es una circunferencia representada por:

$$x^2 + y^2 = 81$$

c) Determina la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano que cumple con la condición de estar a cinco unidades del punto $(4,3)$.

Si utilizas la fórmula de la distancia entre dos puntos obtienes:

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}=5$$

Si elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación:

$$(x-4)^2+(y-3)^2=25$$

Al desarrollar cada binomio:

$$x^2-8x+16+y^2-6y+9=25$$

Al reacomodar términos:

$$x^2+y^2-8x-6y=0$$

La gráfica se muestra a un lado.

d) Determina la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano que cumple con la condición de encontrarse a la misma distancia de los puntos: $A(2,1)$ y $B(6,3)$.

Se pide encontrar puntos $P(x,y)$ que se encuentren a la misma distancia de los puntos A,B, es decir: $d_{AP}=d_{PB}$

$$d_{AP}=\sqrt{(2-x)^2+(1-y)^2} \quad , \quad d_{PB}=\sqrt{(6-x)^2+(3-y)^2}$$

Igualando las distancias queda:

$$\sqrt{(2-x)^2+(1-y)^2}=\sqrt{(6-x)^2+(3-y)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación:

$$(2-x)^2+(1-y)^2=(6-x)^2+(3-y)^2$$

Al elevar al cuadrado cada lado de la ecuación:

$$4-4x+x^2+1-2y+y^2=36-12x+x^2+9-6y+y^2$$

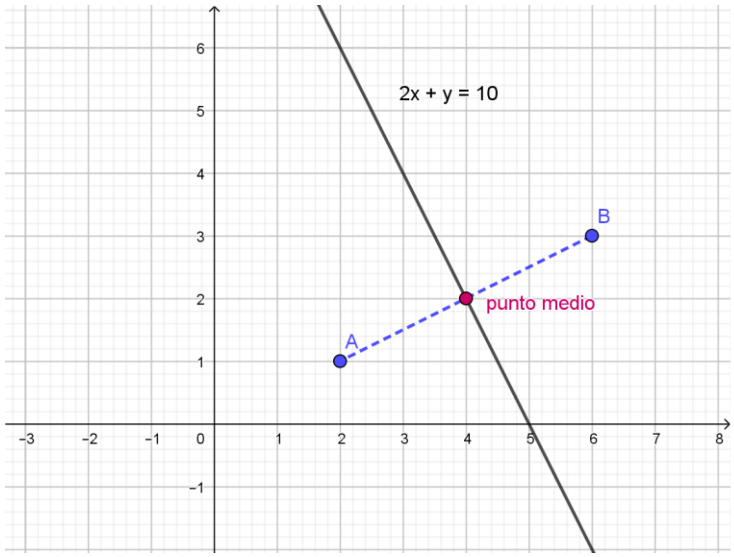
Al reacomodar términos y simplificar:

$$8x+4y-40=0$$

Al dividir entre cuatro:

$$2x+y-10=0$$

Es la recta que pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y su gráfica es:



Ejercicios.

1.- Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que satisfacen las siguientes condiciones:

a) La recta que se encuentra a cuatro unidades a la izquierda del eje de las ordenadas.

b) La recta que está a dos unidades por encima del eje de las abscisas.

c) La recta perpendicular al eje de las abscisas que pasa por el punto $(-3,4)$.

d) La recta paralela al eje de las ordenadas y a cinco unidades a la derecha del punto $(-3,4)$.

e) La recta paralela a la recta $x - 6 = 0$ y que pasa por el punto $(4,4)$.

f) La recta que corresponde al negativo de "x".

g) La recta cuya ordenada es el doble de su abscisa.

h) Son todos los puntos cuya distancia al origen es cuatro.

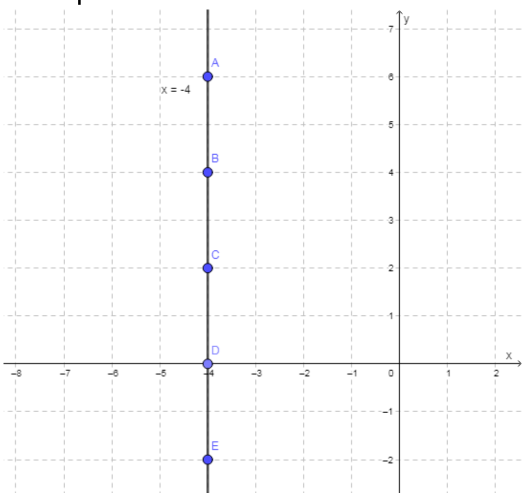
i) Aquellos puntos cuya distancia al punto $C(0, -3,)$ es igual a nueve.

j) Los puntos que se encuentran a una unidad del punto $C(-4,4)$.

k) Los puntos cuya distancia al eje de las abscisas es siempre igual a su distancia al punto $F(0,6)$.

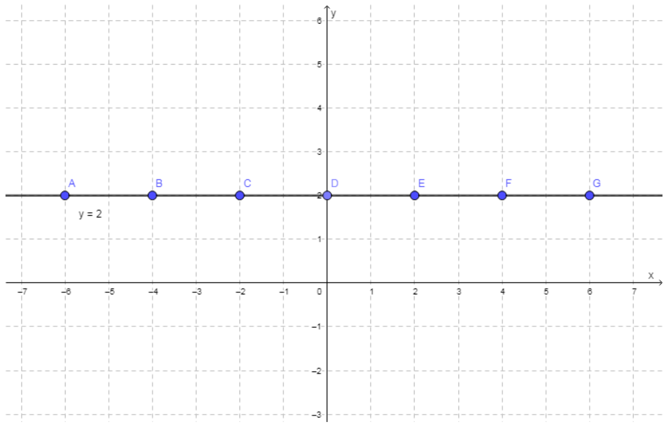
l) Los puntos que se encuentran a la misma distancia del punto $F(0,4)$ y de la recta $y = -4$.

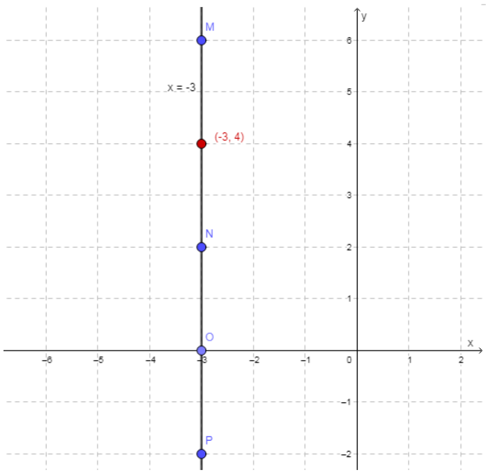
Respuestas:



a) Recta a cuatro unidades a la izquierda del eje de las ordenadas: $x + 4 = 0$

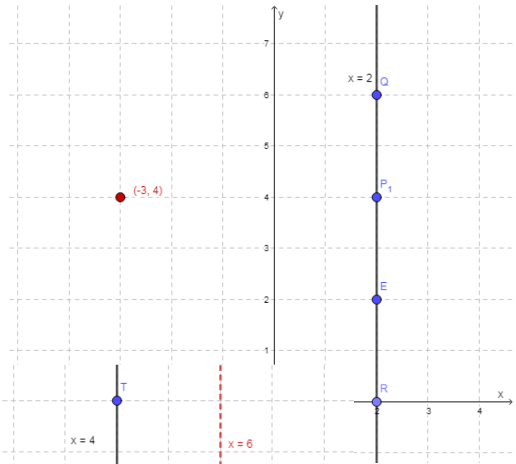
b) Recta a dos unidades por arriba del eje de las abscisas: $y - 2 = 0$

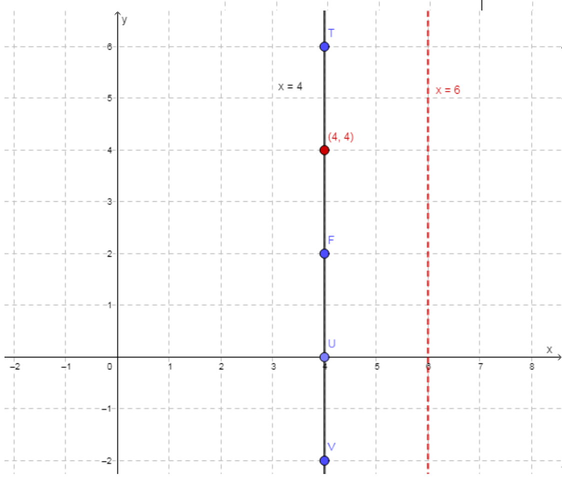




c) Recta perpendicular al eje de las abscisas que pasa por el punto $P(-3,4)$: $x + 3 = 0$

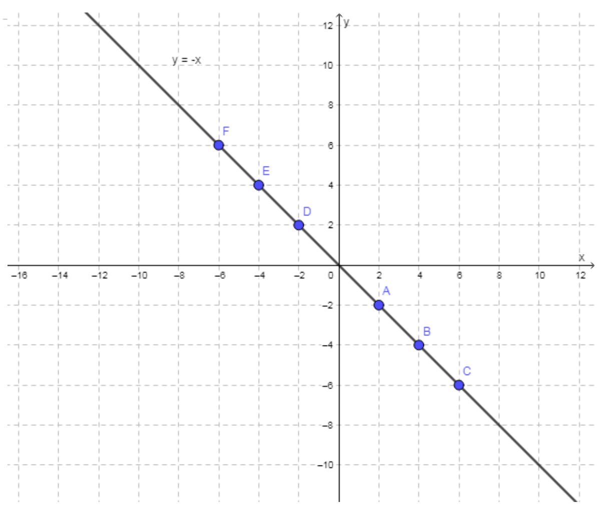
d) Recta paralela al eje de las ordenadas y a cinco unidades del punto $P(-3,4)$: $x-2=0$

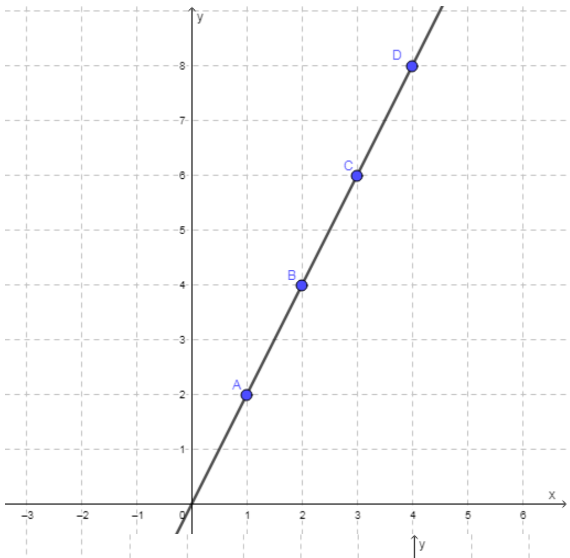




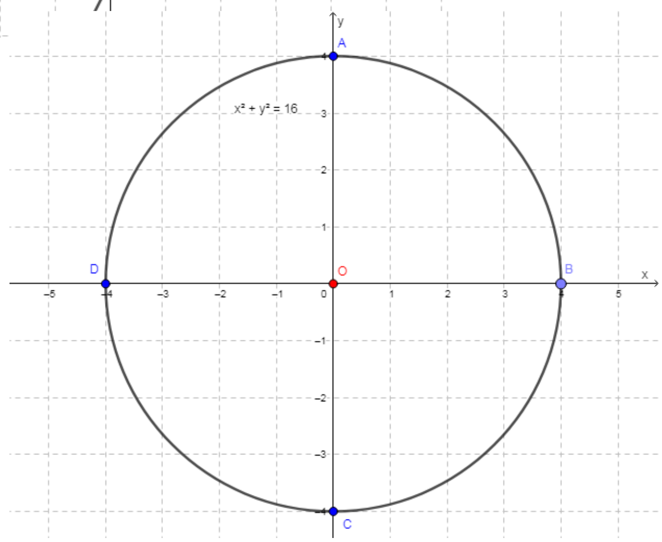
e) Recta paralela a la recta $x-6=0$ que pasa por el punto $P(4,4)$: $x-4=0$

f) Recta que corresponde al negativo de “x”: $y=-x$

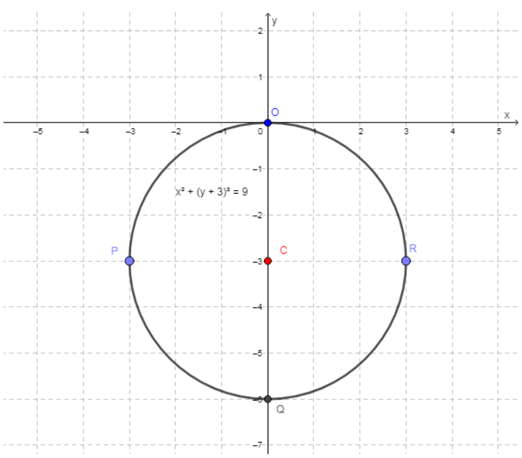




g) Recta cuya ordenada es el doble de su abscisa: $y = 2x$

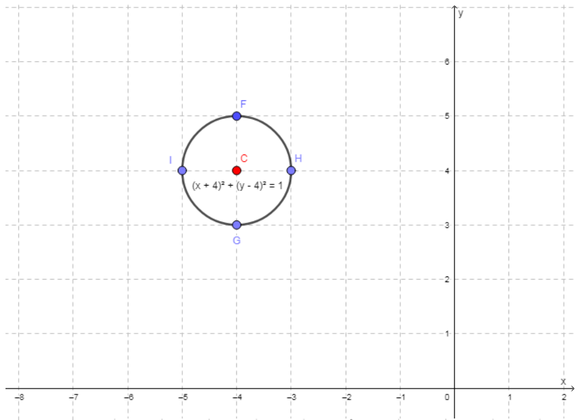


h) Los puntos que equidistan del origen cuatro unidades es la circunferencia: $x^2 + y^2 = 16$

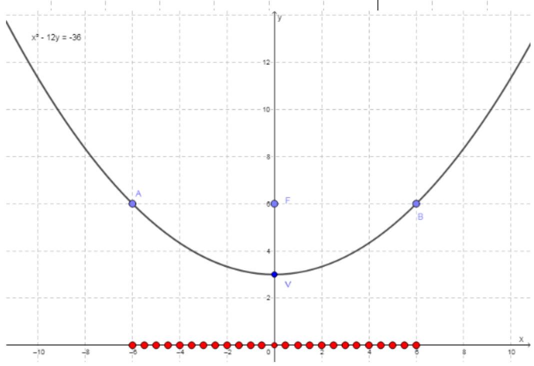


i) Los puntos que equidistan del punto $P(0, -3)$ es la circunferencia:

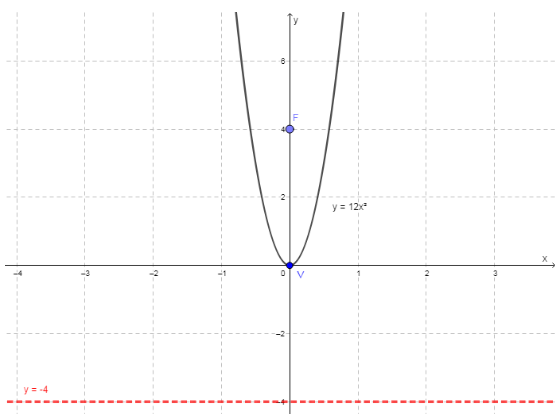
$$x^2 + y^2 + 6y = 0$$



Los puntos que equidistan una unidad del punto $P(-4,4)$ es la circunferencia: $x^2 + y^2 + 8x - 8y + 31 = 0$



k) Los puntos que estan a la misma distancia del eje de las abscisas y del punto $P(0,6)$, es la parábola: $x^2 - 12y + 36 = 0$



l) Los puntos que estan a la misma distancia de la recta $y + 4 = 0$ y del punto $P(0,4)$, es la parábola: $y = 12x^2$

Autoevaluación

1.- Para el triángulo cuyas coordenadas son: $A(-2,1), B(2,4), C(1.-1)$, contesta lo siguiente.

a) ¿De acuerdo a la longitud de sus lados qué tipo de triángulo es?
b) ¿Cuál es su perímetro?
c) ¿Cuánto mide el área?
d) Dar las coordenadas de los puntos medios de cada lado del triángulo
e) ¿Cuánto miden sus medianas?

2.- Se quiere cercar un terreno pentagonal cuyos vértices son: $A(2,6), B(6,7), C(8,4), D(6,1)$, $E(3,2)$, ¿cuál es el perímetro correspondiente?

3.- En un jardín circular se pretende colocar una fuente en el centro del jardín donde debe ser colocada si el diámetro del jardín corresponde a los puntos: $O(-3,4)$, $Q(5,-2)$

4.- Un alpinista camina por la montaña del punto $A(-7,0)$ al punto $B(5,5)$, mientras que otro recorre la montaña por otro camino desde el punto $C(14,0)$ hasta el punto $D(9,4)$,¿Cuál de los dos alpinistas ha hecho un recorrido de mayor inclinación?

5.- Se quiere hacer un mural en una pared cuyos vértices son: $A(-2,-3)$, $B(-2,6)$, $C(8,6)$, $D(8,3)$, ¿De qué superficie se dispone?

6.- Una escalera se apoya en la pared en el punto $A(5,6)$, el pie de la escalera se encuentra en el punto $A(2,0)$, qué ángulo forma la escalera con el piso?

7.- Un automóvil que avanza en línea recta se encuentra a 350 Km del punto de partida y a 250 Km de su punto de llegada. ¿Cuáles son las coordenadas del sitio en donde se encuentra, si las coordenada del punto de partida son $A(1,1)$, y las del punto de llegada son $A(13,1)$?

8.- Dar el lugar geométrico de los puntos que se encuentran a la misma distancia de los puntos $A(2,5)$ y $B(14,-1)$.

9.- Calcular la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que distan del eje de abcisas el triple que del eje de ordenadas.

10.- Da los puntos de intersección de los dos lugares geométricos de los puntos que se encuentran a tres unidades de los puntos $A(-1,0)$ Y $B(2,3)$ respectivamente.

Respuestas al examen de autoevaluación.

1.- a) $d_{\overline{AB}} = 5$, $d_{\overline{AC}} = \sqrt{13}$, $d_{\overline{bc}} = \sqrt{26}$, como las longitudes de los lados del triángulo son diferentes, el triángulo es escaleno. b) El perímetro del triángulo es: $P = 5 + \sqrt{13} + \sqrt{26} = 13.699\, u$. c) El área del triángulo es $A = \frac{17}{2}u^2$, d) Los puntos medios de cada lado del triángulo son: $P_1 = \left(0, \frac{5}{2}\right)$, $P_2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $P_3 = \left(\frac{-1}{2}, 0\right)$, e) $P_{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{53}}{2}$, $P_{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{50}}{2}$, $P_{\overline{BC}} = \frac{\sqrt{89}}{2}$

2.- El perímetro del terreno es: $P = d_{\overline{AB}} + d_{\overline{BC}} + d_{\overline{CD}} + d_{\overline{DE}} + d_{\overline{EA}} = 4.123 + 3.605 + 3.605 + 3.162 + 4.123 = 18.618u$

3.- La fuente debe ser colocada en el punto medio del segmento, es decir en $P(1,1)$.

4.- El primer alpinista hace un recorrido con un ángulo de inclinación de $\alpha = 22.66^o$ mientras que el segundo aplinista hace su recorrido con un ángulo de inclinaciòn de $\beta = 38.65^o$

5.- El área del muro es: $A = 90u^2$.
6.- La escalera forma un ángulo con el piso de $\alpha = 63.43^o$.
7.- El automovil se encuentra en el punto $P(8,1)$, de su recorrido.
8.- El lugar geométrico corresponde a los puntos de la recta:
9.-El lugar geométrico es la recta.
10.- El primer lugar geomètrico corresponde a una circunferencia de radio tres y con centro en el punto $C_1 = (-1,0)$, y el segundo es otra circunferencia con el mismo radio pero centro en $C_2 = (2,3)$, ambas circunferencias se intersectan en los puntos: $P_1 = \left(0, \frac{5}{2}\right)$, $P_2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Unidad 3 La Recta y su Ecuación Cartesiana

Presentación

La geometría analítica, que abarca la mayor parte de este curso, centra su enfoque en el método analítico que permite representar y analizar a través del álgebra, a las curvas y los objetos geométricos que, desde el punto de vista euclidiano sólo admiten formas particulares de construcción, estudio y análisis de sus elementos.

Por lo anterior el alumno reconocerá que se incrementan las posibilidades de análisis y aplicación de la Geometría Euclidiana, al incorporar al estudio de los objetos y relaciones geométricas la representación y los procedimientos del álgebra.

Esta unidad es una de las más importantes, ya que puede aplicarse en diferentes entornos. En el estudio, se resuelven problemas de corte geométrico, con el objetivo de que el alumno avance en la compresión de las diferentes formas de la ecuación de la línea recta, e identifique los elementos que la definen.

Aunque una parte importante del método analítico consiste en obtener la forma algebraica que representa a un lugar geométrico, el tratamiento de la temática no se centra en manejar un conjunto de fórmulas, se intenta aprender *estrategias generales* y diversas formas de representación que apoyan la comprensión y facilitan el trabajo, dependiendo de los elementos o condiciones que se estipulan en un problema.

Conceptos claves

- ✓ ***Recta***
  Es el lugar geométrico de todos los puntos $P\ (x, y)$ tales que si tomamos dos puntos cualesquiera $P_1\ (x_1\ , y_1)$ y $P_2\ (x_2\ , y_2)$ el valor de $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ siempre permanece constante.

- ✓ ***Pendiente***
  Se define a la pendiente de una recta como la tangente del ángulo de inclinación, es decir, $m = \tan\theta$, se designa por la letra *m*.

- ✓ ***Perpendicularidad y paralelismo entre dos rectas***
  Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son paralelas si: $m_1 = m_2$

Dos rectas con pendientes $m_1 \ y \ m_2$ son perpendiculares si: $m_1 \cdot m_2 = -1$ es decir: $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

- ✓ ***Mediatriz***
  Se define como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento. Este lugar geométrico resulta ser la recta perpendicular al segmento por su punto medio.

- ✓ ***Mediana***
  Es la recta que une cada vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto.

- ✓ ***Altura***
  Es la distancia más corta entre la recta que contiene al lado y el vértice opuesto.

- ✓ ***Baricentro***
  Es el punto de intersección de las medianas, y equivale al centro de gravedad de un triángulo.

- ✓ ***Ortocentro***
  Es el punto de intersección de las alturas.

Formas de la ecuación de la recta

Ecuación Punto – pendiente de la recta

Dado que se conoce uno de sus puntos y el valor de la pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad x_2 - x_1 \neq 0$$

despejando obtenemos: $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

Ejemplo:

Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto (2,-3) y tiene una pendiente igual a 3.

Solución:

Se da el valor de la pendiente que es $m = 3$ y se sabe que pasa la recta por el punto (2,-3) entonces tenemos que:

$$y - y_1 = m\ (x - x_1)$$

$$y - (-3) = 3\ (x - 2)$$

$$y + 3 = 3\ (x - 2)$$

Ecuación de la recta en su forma punto - pendiente.

Simplificando y ordenando podemos llegar a la ecuación general de la recta que es: $Ax + By + C = 0$,

$$y + 3 = 3x - 6$$

$$3x - y - 9 = 0$$

Ecuación general de la recta

Angulo de inclinación de la recta

Si la pendiente es igual a 3 ($m\ =\ 3,\ del\ ejemplo\ anterior$); la tangente será igual a $\boldsymbol{m} = tan\,\theta$ por lo que:

$$3 = \tan\theta$$

Su ángulo de inclinación es:

$$\theta = ang\ tan\ (3)$$

$$\theta = 71.56° = 71°\ 33'\ 54.18''$$

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Para conocer la ecuación de la recta, conocidas las coordenadas de dos de sus puntos, lo podemos hacer a partir de la ecuación de punto - pendiente, sustituyendo a ***m*** por $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ quedando:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ (x - x_1)$$

Ejemplo:

Se conocen los puntos $A(20{,}15)\ y\ B(-30, -20)$ por donde pasa una recta, ¿Cuál es su ecuación?

Solución:

Para contestar la pregunta sustituye los puntos en la ecuación anterior:

$$\begin{matrix} x_1\,,\ y_1 & & x_2\,,\ y_2 \\ A(20\,,15) & y & B(-30\,,-20) \end{matrix}$$

Sustituimos

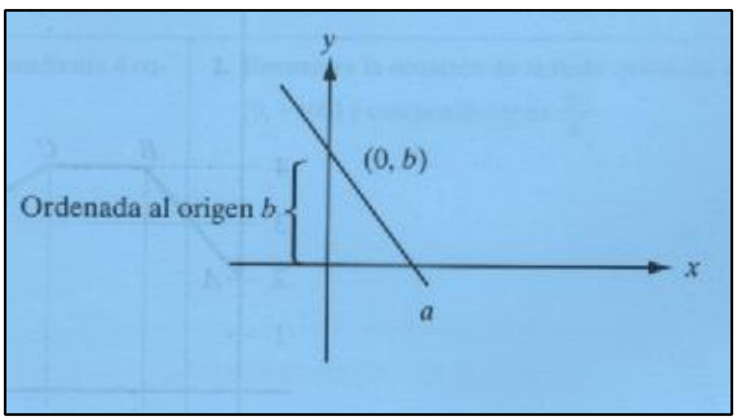
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)$$

$$y - 15 = \frac{7}{10}\,(x - 20)$$

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Ecuación pendiente – ordenada al origen

Conocemos la pendiente ***m*** de la recta y una de las coordenadas donde la recta corta al eje "*y*" (ordenada al origen b) basta con sustituir la pendiente y la ordenada (0, b) en la ecuación de punto y pendiente para obtener la ecuación.



$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - b = m\,(x - 0)$$

$$y - b = mx$$

$$y = mx + b$$

Ecuación de la recta pendiente - ordenada al origen

Ejemplo:

Encuentra la ecuación de la recta con ordenada al origen -4 y pendiente igual a 7

Solución:

Utilizamos la ecuación anterior, tenemos $m = 7 \; y \; b = -4$

$$y = mx + b$$

$$y = 7x - 4$$

Ecuación de la recta pendiente - ordenada al origen.

Ecuación de la recta en su forma simétrica

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Usaremos la ecuación $3x - y - 9 = 0$. Para obtener la ecuación de la recta en su forma simétrica es necesario calcular las coordenadas al origen de la recta.

Así, si la ecuación de la recta en su forma general es $3x - y - 9 = 0$, para calcular las coordenadas al origen utilizamos las siguientes expresiones:

Abscisa al origen:

$$a = \frac{-c}{A} = \frac{-(-9)}{3} = \frac{9}{3} = 3 \text{ la coordenada es } (3, 0)$$

Ordenada al origen:

$$b = \frac{-c}{B} = \frac{-(-9)}{-1} = -9 \text{ la coordenada es } (0, -9)$$

Con los datos anteriores tenemos que:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-9} = 1$$

Simplificando y aplicando las leyes de los signos en la ecuación anterior:

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{9} = 1$$

Ecuación de la recta en su forma simétrica

Rectas paralelas y perpendiculares

Para calcular las ecuaciones de las rectas perpendiculares y paralelas a la recta dada, veremos el siguiente

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta paralela a la recta $L_1:\ x - 2y + 7 = 0$ y que pase por el punto $P\ (1,3)$

Solución:

Obtenemos la pendiente de la recta dada:

$$m_1 = \frac{-A}{B} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Como sabemos las rectas paralelas tienen la misma pendiente, por lo que la recta

$$L_2:\ m_1 = m_2;\ \ m_2 = \frac{1}{2}$$

Y además pasa por el punto $P\ (1,3)$ utilizamos la ecuación punto – pendiente para obtener la ecuación de la recta paralela en su forma general:

$$y - y_1 = m\ (x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{1}{2}\ (x - 1)$$

$$2(y - 3) = 1\ (x - 1)$$

$$2y - 6 = x - 1$$

$$L_2:\ x - 2y + 5 = 0 \quad \textit{ecuación de la recta paralela}$$

Para obtener la ecuación de la recta perpendicular a la recta dada L_1, lo haremos a través del siguiente

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la recta L_1: $x - 2y + 7 = 0$ y que pase por el punto $P\ (1{,}3)$

Solución:

Sabemos que la pendiente de la recta perpendicular es recíproca y de signo contrario, por lo que:

$$m_3 = -\frac{1}{m_1}\ ;\ m_3 = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

Y pasa por el punto P (1,3), volvemos a utilizar la ecuación punto – pendiente:

$$y - y_1 = m\ (x - x_1)$$

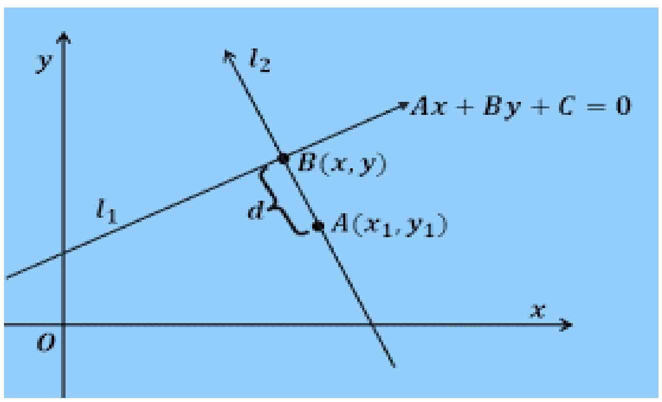
$$y - 3 = -2\ (x - 1)$$

$$y - 3 = -2\ x + 2$$

$$L_3\!: 2x + y - 5 = 0\ \mathit{ecuación\ de\ la\ recta\ perpendicular}$$

Distancia de un punto a una recta

Es la menor distancia medida en forma perpendicular entre el punto dado y la línea recta.



Ejemplo:

Encontrar la distancia que existe desde el punto $P\ (6{,}4)$ a la recta $2x + y - 3 = 0$, dibuja la recta y el punto.

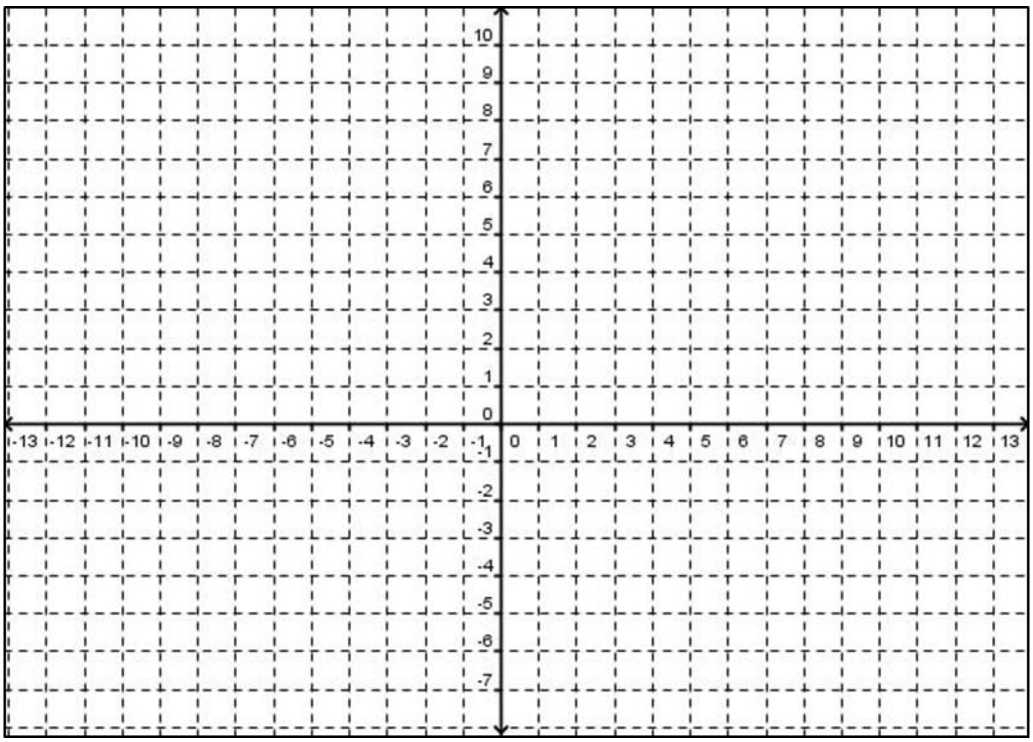
Solución:

Para dibujar la recta y el punto, se despeja la variable "y" de la ecuación de la recta: $y = -2x + 3$ y se encuentran algunos puntos pertenecientes a la recta:

x	y

-3	9
-2	7
-1	5
0	3
1	1
2	-1
3	-3

Traza la recta anterior, con base en la tabulación, sobre el sistema de coordenadas,



Ahora traza la recta perpendicular que pasa por el punto $P\ (6{,}4)$ (dibújalo) y que va hacia la recta $2x + y - 3 = 0$

Para calcular la distancia del punto a la recta utilizamos la ecuación:

$$d\ =\ \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 +\ B^2}}\right|$$

Sustituimos la recta y el punto dado en la ecuación anterior

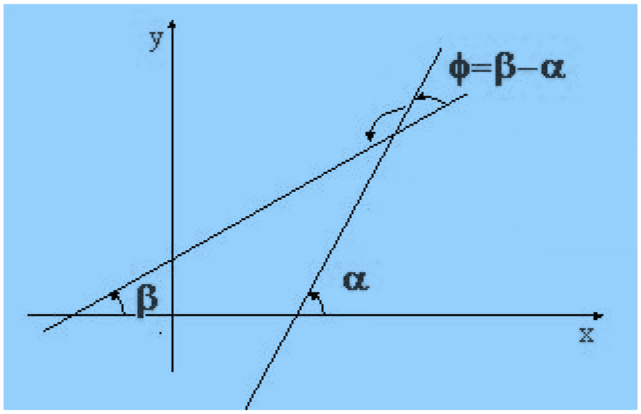
$$d\ =\ \left|\frac{2\ (6) + 1(4) - 3}{\sqrt{(2)^2 +\ (1)^2}}\right|$$

$$d = \left| \frac{12 + 4 - 3}{\sqrt{4 + 1}} \right|$$

$$d = \left| \frac{13}{\sqrt{5}} \right| = 5.814\, u$$

Distancia del punto a la recta.

Ángulo entre dos rectas



Si queremos encontrar el ángulo entre dos rectas utilizamos la fórmula:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

Ejemplo: Encontrar el ángulo que forman las rectas

$$L_1:\ 2x - 3y + 4 = 0$$

$$L_2:\ x + 4y - 2 = 0$$

Solución: Calculamos la pendiente de las 2 rectas con:

$$m_1 = \frac{-A}{B} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$m_1 = \frac{-A}{B} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

Calculamos el ángulo entre las dos rectas:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

$$\tan\theta = \frac{-\frac{1}{4} - \frac{2}{3}}{1 + \left[\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)\right]}$$

$$\tan\theta = \frac{-\frac{1}{4} - \frac{2}{3}}{1 + \left[-\frac{1}{6}\right]}$$

$$\tan\theta = \frac{-\frac{11}{12}}{\frac{5}{6}}$$

$$\tan\theta = -\frac{11}{10}$$

$$\theta = ang\ tan\left(-\frac{11}{10}\right)$$

$$\theta = -47.46°$$

Recuerda que el ángulo se mide en sentido antihorario, por lo que a este resultado se le suma a 180° y tenemos que el ángulo es: $\theta = 132.53°$ que es el ángulo entre las dos rectas $L_1\ y\ L_2$.

Ecuaciones de las rectas notables del triángulo (mediatrices, mediana y altura)

Mediatriz

Mediatriz de un segmento es el **lugar geométrico** de los **puntos del plano** que **equidistan** de los **extremos**.

Ecuación de la mediatriz

$d\ (P, A) = d(P, B)$

$P\ (x, y)$ $\quad A(x_1, y_1)$ $\quad B(x_2, y_2\ )$

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

Ejemplo:

Encuentra la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos $\mathrm{A}\ (2,5)$ y $\mathrm{B}\ (4,-7)$.

Solución:

$$d\ (P, A) = d(P, B)$$

$$\sqrt{(x-2)^2+\ (y-5)^2}=\ \sqrt{(x-4)^2+\ (y+7)^2}$$

$$x^2-4x+4+\ y^2-10y+25=x^2-8x+16+\ y^2+17y+49$$

$x-6y-9=0$ *ecuación de la recta mediatriz*.

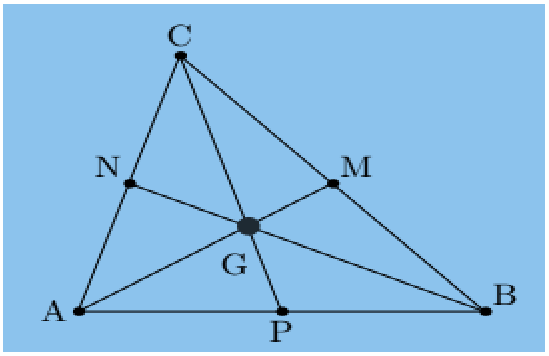
Mediana

Una mediana de un triángulo es el segmento de recta que va del vértice al punto medio del lado opuesto. El punto medio M entre los puntos $P_1(x_1, y_1)\ y\ P_2(x_2, y_2\ )$, se obtiene mediante:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Ejemplo:

Hallar el baricentro del triángulo $A(0,0) B\ (4,0)\ C\ (1,3)$.



Solución: calculamos las medianas,

$$M = \left(\frac{4+1}{2}, \frac{0+3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$P = \left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (2{,}0)$$

Mediana AM

$$\frac{x-0}{5} = \frac{y-0}{3} \Rightarrow 3x - 5y = 0 \; ecuación\ de\ la\ recta\ mediana\ AM$$

Mediana CP

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{3} \Rightarrow 3x + y - 6 = 0 \; ecuación\ de\ la\ recta\ mediana\ CP$$

G es la intersección de AM con CP resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 0 \\ 3x + y - 6 = 0 \end{cases}$$

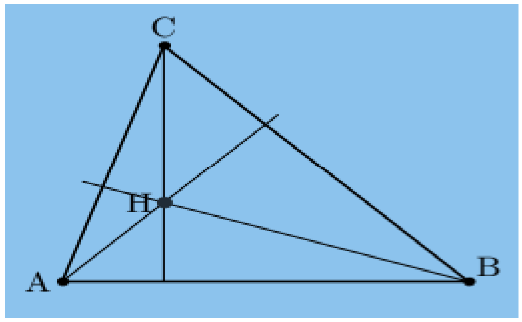
$$6y - 6 = 0 \Rightarrow y = 1 \,;\; x = \frac{5}{3}$$

$$G\left(\frac{5}{3}, 1\right)$$

Altura

Ejemplo:

Hallar el ortocentro del triángulo $A\ (0.0)\ B\ (4.0)\ C\ (1,3)$



Solución:

Altura por C es perpendicular a AB

$$h_C = \frac{x-1}{0} = \frac{y-3}{1} \Rightarrow x = 1$$

Altura por A es perpendicular a BC

$$h_A = \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} \Rightarrow y = x$$

H es la intersección de $h_A\ con\ h_C$, resolvemos el sistema:

$$x = 1$$

$$y = x$$

$$\Rightarrow x = 1\ ;\ y = 1$$

$$H\ (1,1)$$

Autoevaluación

Instrucciones:

- ✓ Lee cuidadosamente cada pregunta.
- ✓ Escribe el número y la justificación de tu respuesta en una hoja aparte.
- ✓ El inciso anótalo en la plantilla.

1	2	3	4	5	6	7	8

1. La ecuación de la recta $2x + y - 2 = 0$ tiene como parámetros:

   A) Pendiente $m = 1$, Ordenada al origen $b = 1$

   B) Pendiente $m = 1$, Ordenada al origen $b = 3$

   C) Pendiente $m = -1$, Ordenada al origen $b = -2$

   D) Pendiente $m = -2$, Ordenada al origen $b = 2$

2. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por $P(-3, -5)$ y es perpendicular a recta $3x + 2y = 4$?

   A) $2x - 3y - 9 = 0$

   B) $3x + 2y = 10$

   C) $3x - 2y - 9 = 0$

   D) $2x + 3y = 0$

3. Determina la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(2, 1)\ y\ (-4, 11)$

   A) m= $\frac{5}{3}$ B) m= $\frac{-2}{1}$ C) m=$\frac{-5}{3}$ D) m=$\frac{1}{6}$

4. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A\ (5\ , 7) y\ B\ (-4\ , 3)$

   A) $10x + y - 37 = 0$

   B) $4x + 9y + 43 = 0$

   C) $4x - 9y - 11 = 0$

   D) $10x - y + 43 = 0$

5. Es la recta que pasa por el punto $(0,-2)$ con una pendiente $m = 3$

A) y=-2x+3 B) y=3x-2 C) y=-3x+2 D) y=3x+2 E) y=2x-3

6. ¿Cuál es el ángulo de inclinación de la recta cuya ecuación es $y = 2x + 5$?

A) 23.5º B) 30º C) 45º D) 63.4º E) 58.2º

7. Determina la ecuación de la recta paralela, a la recta $x + 2y + 3 = 0$ y que pasa por el punto $A(3,5)$

A) $x + 2y + 13 = 0$ B) $x - 2y - 13 = 0$
C) $-x + 2y - 13 = 0$ D) $x + 2y - 13 = 0$

8. Determina la distancia más corta del punto $P(6,4)$ a la recta $3x + 4y - 40 = 0$

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{74}{5}$ C) $\frac{6}{5}$ D) $\frac{6}{25}$ E) $\frac{74}{25}$

Respuestas al examen de autoevaluación

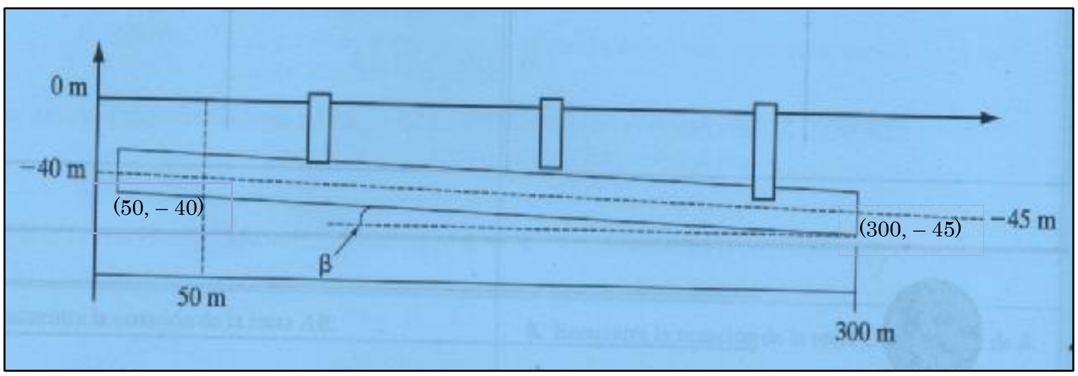
1	2	3	4	5	6	7	8
D	A	C	B	B	D	B	C

Ejercicios

1. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto P (-2,4) y tiene una pendiente m = -2
2. Un triángulo tiene por vértices a los puntos (1,1) (7,3) y (6,8). Encontrar el ángulo entre cada una de las líneas rectas.
3. Encontrar la ecuación de una recta paralela a la recta de ecuación

$3x - 2y + 7 = 0$ y que pasa por el punto (1,1)

4. Encontrar la ecuación de una recta perpendicular a la recta de ecuación $3x - 2y + 7 = 0$ y que pasa por el punto (1,1)
5. Las aguas negras de la ciudad de México se conducen en el drenaje profundo por medio de la gravedad (observa la figura). Para aprovechar esta fuerza, las tuberías conservan la pendiente o inclinación necesaria para mover los fluidos a una velocidad calculada que no erosione los tubos. Para realizar los cálculos de un tramo recto, es necesario conocer las coordenadas de sólo dos puntos del subsuelo y con éstos se determina la ecuación de la recta por donde se instalará el drenaje. La pendiente podrá determinarse también con dos puntos, que se obtendrán de los planos topográficos del lugar empleando la ecuación $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Considerando los puntos en la figura por donde pasa la tubería, determina la ecuación de la recta en sus tres formas. (punto-pendiente, general de la recta, pendiente - ordenada al origen)



6. Halla la distancia que existe del punto P (1,1) a la recta $2x + 3y - 12 = 0$

Bibliografía

1) Avilés R. Juan W. *Sistemas de coordenadas y lugares geométricos,* Colegio de Ciencias y Humanidades, Plantel Sur, México 2005.
2) Chávez P. Gpe. X. et al. *Ecuación cartesiana de la recta*, Colegio de Ciencias y Humanidades, Plantel Sur, México 1997.
3) García Camacho, Trinidad et al. *Guía para el profesor de matemáticas III.* Colegio de Ciencias y Humanidades, México, 2009.
4) *Orientación y Sentido del Área de Matemáticas,* Universidad Nacional Autónoma de México, Colegio de Ciencias y Humanidades, agosto 2005.

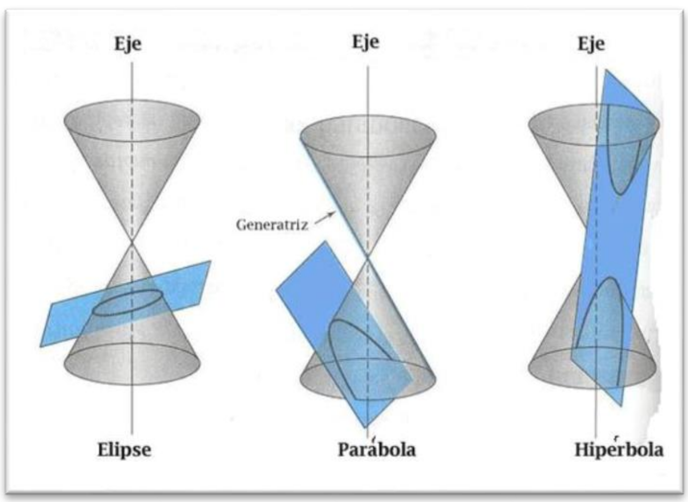
5) Ortiz C., Fco. J. *Matemáticas III, Bachillerato General,* Publicaciones Cultural.
6) Pimienta, Julio. *Matemáticas III, Un enfoque constructivista.* México. Pearson-Prentice Hall, 2007.
7) *Programas de Estudio, Área matemáticas, Matemáticas I a IV*, Universidad Nacional Autónoma de México, Colegio de Ciencias y Humanidades, México, primera edición 2016.

Unidad 4. La parábola y su ecuación cartesiana

Presentación

El estudio de la Parábola, como la Elipse y la Hipérbola, ha sido de gran importancia en la Geometría Analítica. Aunque muchos personajes se dedicaron a ello, se suele atribuir a Menecmo (hacia 350 a.c.) el descubrimiento de estas tres curvas. Como suele ser frecuente en la historia de los descubrimientos hechos por el hombre, Menecmo llegó a dichas curvas cuando intentaba resolver, sólo con regla y compás, un antiguo problema que consistía en la $\ll duplicación\ del\ cubo \gg^*$.

Muchos de los resultados obtenidos por Menecmo, incorporando además trabajos del mismo Euclides, aparecen en uno de los más importantes tratados de la Matemática griega: *Las cónicas* de Apolonio. Su concepción, verás que es muy fácil de entender: si tenemos un cono de revolución de dos mantos y lo intersectamos con un plano, obtendremos, según el ángulo con el cual el plano corte al cono, la Elipse, Parábola e Hipérbola. Así entonces, al conjunto de puntos que forman la intersección de un plano y el cono, les llamaremos *secciones cónicas.*



Las aplicaciones prácticas que la humanidad le ha ido encontrando a las secciones cónicas, en óptica y en las comunicaciones por poner un ejemplo, ha hecho imprescindible su estudio y conocimiento. En esta unidad estudiarás solamente aquello referente a la Parábola, para más tarde, continuar con las otras secciones cónicas. El objetivo es que seas capaz de obtener la ecuación de la Parábola cuando se te proporcionan algunos elementos necesarios y suficientes de la misma, dada la ecuación puedas identificar sus elementos y, finalmente, resuelvas problemas de aplicación práctica en los que sea necesario recurrir a éste importante lugar geométrico.

Bibliografía de consulta

González, P. (2009). Orígenes y evolución histórica de la geometría analítica. España. *www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriaanalitica.pdf*

Swokowski, E., Cole, J. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* (13ª ed.) México: CENGAGE Learning.

Lehmann, C. (2008). *Geometría Analítica.* México: Limusa.

Conceptos claves

- ***Lugar Geométrico:*** Conjunto de puntos en un plano que cumplen con determinada característica o ecuación.
- ***Vértice:*** Punto de la parábola más cercano a la directriz.
- ***Foco:*** Punto fijo en el plano que se utiliza en la generación de las cónicas.
- ***Directriz:*** Recta que determina o dirige las condiciones de la parábola.
- ***Eje de simetría:*** Recta que pasa por el foco, perpendicular a la directriz y que divide por la mitad a la parábola.

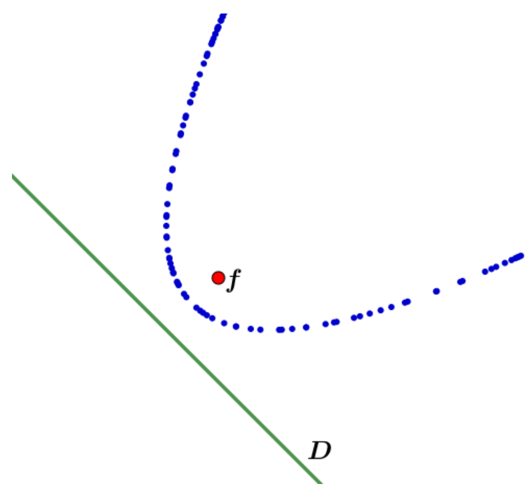
Sugerencias de actividades de aprendizaje teórico prácticos

La ecuación de la parábola, así como sus elementos que la componen, los obtendremos de la condición geométrica que la define.

Una parábola es el conjunto de puntos en el plano que son equidistantes a un punto fijo (llamado **foco**) y a una recta (llamada **directriz**).

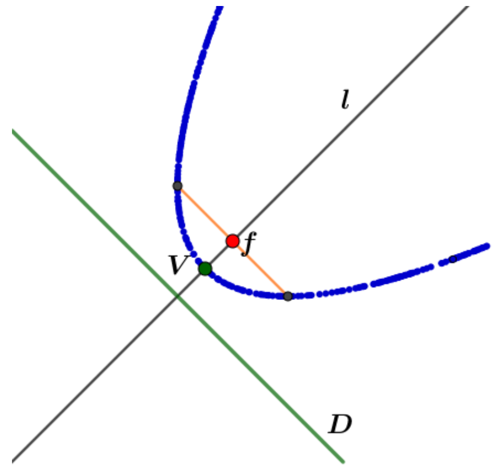
Observa cómo la definición anterior me genera un lugar geométrico, pues solamente un conjunto de puntos en el plano, podrán cumplir con la característica que se especifica. Equidistantes significa que los puntos, que quieran pertenecer al lugar geométrico, deberán estar a la misma distancia del foco y la directriz.

Designemos por f y D, el foco y la directriz de una parábola, respectivamente. Si se traza la condición geométrica de la parábola, se obtendrá una curva como la que se observa a continuación:



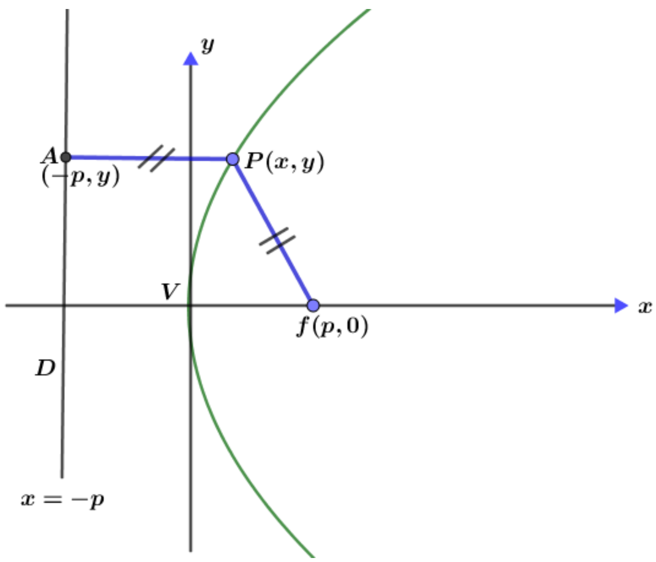
Observa cómo cada punto P de la curva cumple con la condición geométrica de la parábola, es decir, cada punto P satisface que:

$$\overline{FP} = \overline{PD}$$



Antes de deducir la ecuación de la parábola, veamos algunos elementos que se incluyen en este lugar geométrico.

La recta $\boldsymbol{l}$ que pasa por $\boldsymbol{f}$ y es perpendicular a $\boldsymbol{D}$ se llama ***eje*** de la parábola y es a su vez el eje de simetría de la curva. Al punto de intersección $\boldsymbol{V}$ de la recta $\boldsymbol{l}$ y la parábola, lo llamaremos ***Vértice*** de la parábola. Por último, el segmento de recta que pasa por el foco $\boldsymbol{f}$ y es perpendicular al eje $\boldsymbol{l}$, con puntos extremos sobre la parábola, se llama ***lado recto*** y al calcular su distancia se obtiene la ***longitud del lado recto.***



A partir de la condición que se dio del lugar geométrico que define la parábola, podemos deducir su ecuación en el plano coordenado, y trataremos de que sea tan simple como sea posible. Para ello, hagamos coincidir el eje de la parábola con el eje x del plano cartesiano y también, que el vértice esté sobre el Origen. Si consideramos el foco f a la derecha del origen entonces tendrá de coordenadas $(p, 0)$ y la directriz D a la izquierda, con ecuación $x = -p$.

Nota cómo la distancia de f (foco) a P (cualquier punto de la parábola), es la misma que, de P al punto A (punto de la Directriz), es decir, $\boldsymbol{d_{\overline{fP}} = d_{\overline{PA}}}$ Usando la fórmula de la distancia obtendremos:

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-(-p))^2 + (y-y)^2}$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y)^2} = \sqrt{(x+p)^2 + (0)^2}$$

Ahora elevemos al cuadrado ambos lados de la igualdad y simplificamos:

$$\left(\sqrt{(x-p)^2 + (y)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x+p)^2}\right)^2$$

$$(x - p)^2 + (y)^2 = (x + p)^2$$

Desarrollando los binomios indicados y trasponiendo términos:

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$y^2 = x^2 + 2px + p^2 - x^2 + 2px - p^2$$

Para obtener finalmente $\boldsymbol{y^2 = 4px}$

Es importante hacer notar que hemos demostrado que las coordenadas de cualquier punto $P(x, y)$ sobre la parábola, satisface la ecuación $y^2 = 4px$. De manera inversa, si $P(x, y)$ es una solución de $y^2 = 4px$ entonces al revertir los pasos anteriores observaremos que el punto $P(x, y)$ está sobre la parábola.

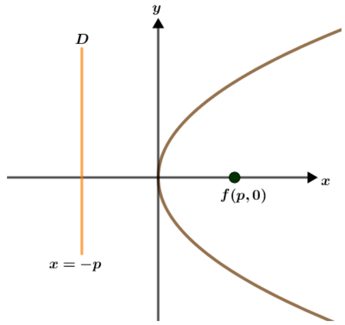
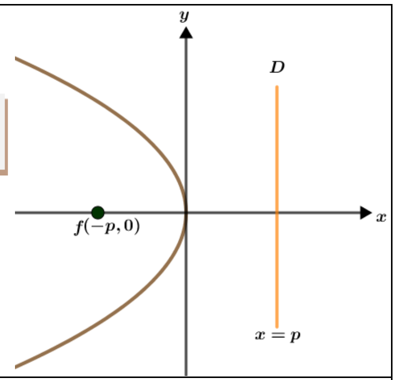
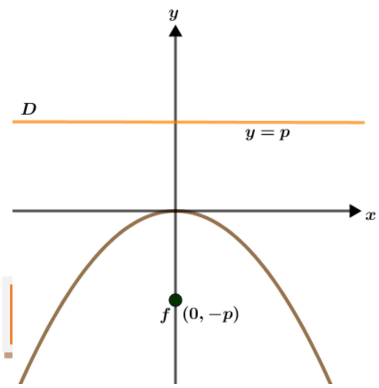
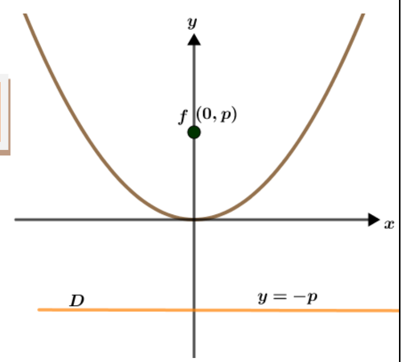
Hemos obtenido la ecuación de la parábola con vértice en el origen, foco f sobre el eje de las “"x" y directriz D en el lado izquierdo. Ahora bien, si el vértice está en el origen y el foco f en el lado negativo del eje “x”, ¿Seguirá siendo la misma ecuación? ¿Cambiará sólo la ecuación de la directriz D? ¿Qué cambiará de la ecuación obtenida, si el vértice se mantiene en el origen pero el foco f está sobre el eje de las "y"?

Ejercicio 1

Obtén la ecuación de la parábola con vértice en el origen, foco $\boldsymbol{f}$ en $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{p})$ y ecuación de la directriz $\boldsymbol{y = -p}$.

Si llevaste a cabo correctamente el ejercicio 1 propuesto, seguramente notaste que llegaste a una ecuación para la parábola que cambia en su estructura. Si el foco es colocado en la parte negativa del eje x, en la parte positiva del eje y o en su parte negativa, se obtiene una forma diferente de la ecuación de la parábola.

Las cuatro formas de la ecuación de una parábola con vértice en el origen y foco f sobre algún eje de coordenadas, a una distancia p del origen están resumidas en la siguiente tabla.

 *Ecuación* $\boldsymbol{y^2 = 4px}$	*Ecuación* $\boldsymbol{y^2 = -4px}$ 
 *Ecuación* $\boldsymbol{x^2 = -4py}$	$\boldsymbol{x^2 = 4py}$ 

Si observas con cuidado las gráficas mostradas te darás cuenta de inmediato que la parábola es una curva simétrica con respecto a su eje. Más adelante nos apoyaremos en este hecho para elaborar gráficas de esta curva.

Ejemplo 1**.**

Encuentra la ecuación de la parábola que tiene vértice en el origen $V(0,0)$ y foco $f(0,2)$.

Solución

Como el foco es $f(0,2)$, la distancia del vértice al foco es 2. Entonces p es igual a 2, y un punto de la directriz estará también a dos unidades del vértice, de modo que la ecuación de la directriz será $y = -2$. Según nuestra tabla anterior, la ecuación de la parábola buscada tendrá que tener la forma $x^2 = 4py$. Como sabemos que $p = 2$, podemos sustituir en la ecuación:

$$x^2 = 4(2)y.$$

$$x^2 = 8y$$

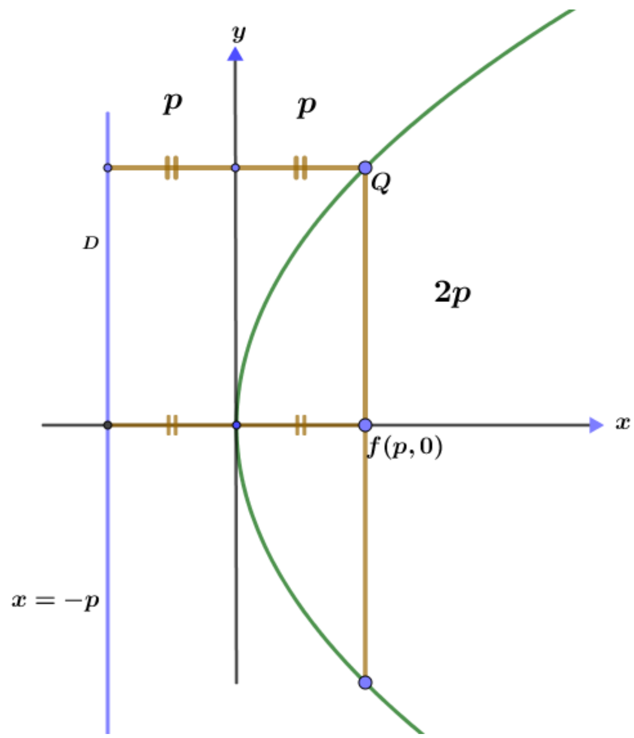
Que es la ecuación que se buscaba para la parábola.

Podemos usar las coordenadas del foco para estimar el "ancho" de una parábola cuando nos pidan trazar su gráfica. Como se dijo anteriormente, el segmento de recta que pasa por el foco f y es perpendicular al eje de la parábola, se llama lado recto, y al obtener su longitud se puede observar el diámetro focal, es decir, que tan ancha es la parábola.

Para deducir la longitud del lado recto, te pediremos que observes con detenimiento la gráfica que te presentamos.

De inspeccionar la gráfica, podemos ver que la distancia de un punto extremo Q del segmento del lado recto a la directriz es $\boldsymbol{2p}$**.** En consecuencia, la distancia del punto Q al foco f también deberá ser $\boldsymbol{2p}$ (¿recuerdas la condición geométrica de la parábola?). Podrás concluir que la longitud del lado recto será entonces $\boldsymbol{4p}$.

Ejemplo 2**.** Una parábola tiene por ecuación $3y^2 + 12x = 0$. Encuentra las coordenadas del foco, ecuación de la directriz, longitud de su lado recto y traza la gráfica correspondiente.



Solución

Para hallar los elementos que nos piden, tendremos que encontrar el valor correspondiente a p. Para ello, tendremos que reescribir la ecuación dada en su forma normal que conocemos:

$3y^2 + 12x = 0$

$\left(\frac{1}{3}\right)(3y^2 + 12x) = (0)\left(\frac{1}{3}\right)$ Multiplicando de ambos lados de la igualdad por el recíproco de 3.

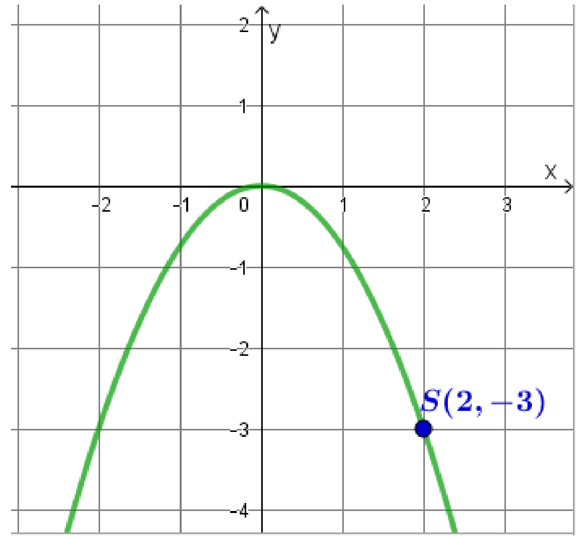
$y^2 + 4x = 0$

$y^2 + 4x - 4x = 0 - 4x$ Sumando el inverso de $4x$ de ambos lados de la igualdad.

$y^2 = -4x$.

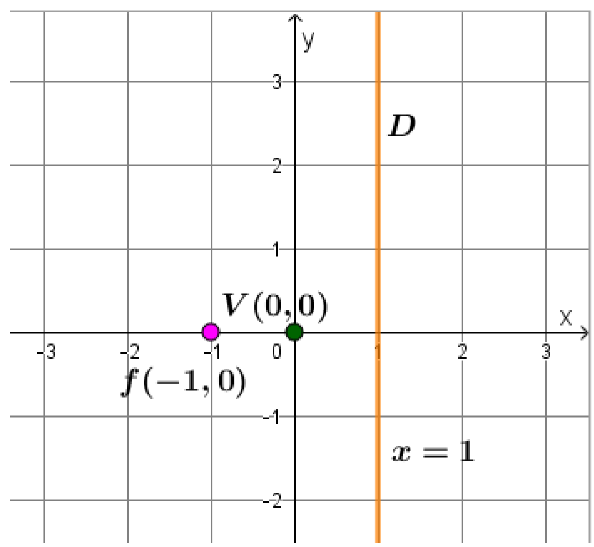
Comparando esta última ecuación con alguna de las formas básicas de nuestra tabla, nos damos cuenta que se corresponde con $y^2 = -4px$. De tal manera que $4p = 4$, es decir $p = 1$.

Entonces el foco tendrá de coordenadas $f(-1,0)$ y la ecuación de la directriz será $x = 1$. Ahora, sabemos que su longitud del lado recto es $4p$, es decir $4(1) = 4$.

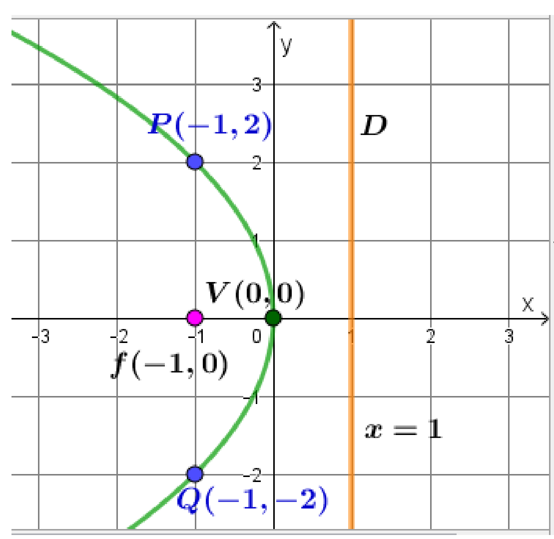


Para trazar la gráfica correspondiente, recopilamos la información que ya tenemos: vértice en $V(0,0)$, foco en $f(-1,0)$, directriz $x = 1$ y la longitud del lado recto 4. Usaremos la longitud del lado recto para graficar dos puntos que pertenecen a la parábola.

Tomando como punto de partida el foco $f(-1,0)$, y cómo abre la parábola, la coordenada que se ve afectada es la que corresponde a la altura, es decir,"y". Así entonces, el punto P (extremo del lado recto) tendrá como coordenadas $P(-1,0+2p)$ o bien $P(-1,2)$ y el punto Q (extremo del lado recto) tendrá como coordenadas $Q(-1,0-2p)$ o bien $Q(-1,-2)$. Graficamos estos dos puntos y trazamos a continuación la gráfica de la parábola.



Ejemplo 3**.** Encuentra los elementos de la parábola cuya gráfica se muestra a continuación.



Solución

Observamos que la parábola tiene vértice en el origen y que pasa por el punto $S(2,-3)$. Suponemos que el foco deberá estar en $f(0,-p)$, y su ecuación tendrá que ser de la forma $x^2 = -4py$, pero no sabemos cuánto vale p. Haciendo uso de la simetría de la parábola, podemos afirmar que el punto $R(-2,-3)$ también pertenece a la parábola, pero sería un error suponer que son los extremos del lado recto y el foco está en el punto medio de este segmento. ¿Qué hacer? ¿Podemos suponer que p tiene cualquier valor? Sabemos que la ecuación de la parábola tendrá que satisfacer el punto S. ¡Aquí está la clave!

Si las coordenadas de un punto satisfacen una ecuación, este punto pertenece a la gráfica de esa ecuación y, recíprocamente, si un punto está sobre la gráfica de una ecuación, sus coordenadas satisfacen la ecuación.

Con esto en mente, substituimos el punto S en nuestra ecuación $x^2 = -4py$

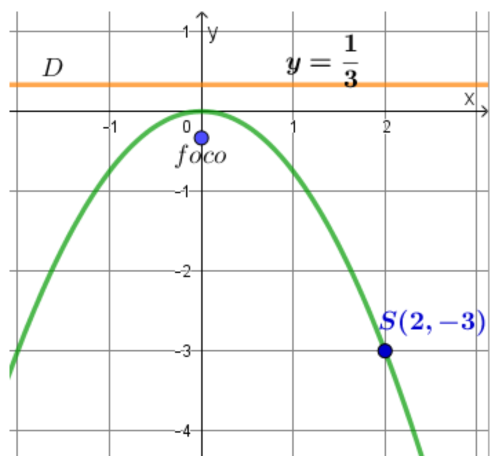
$$(2)^2 = -4p(-3)$$

$$4 = 12p$$

$$\frac{4}{12} = p$$ que al simplificar obtenemos $p = \frac{1}{3}$

Tenemos el valor del parámetro p, de modo que el foco es $f\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ y la directriz D es $y = \frac{1}{3}$ o mejor $3y - 1 = 0$. Como la longitud del lado recto es $4p$, es decir, $4\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$ el segmento se prolonga $\frac{2}{3}$ a la izquierda y $\frac{2}{3}$ a la derecha del foco. Finalmente la ecuación de la parábola será $x^2 = -4\left(\frac{1}{3}\right)y$ que al simplificar queda como $\boldsymbol{x^2 = -\frac{4}{3}y}$. Te presentamos un resumen y la gráfica correspondiente.

Vértice	$\boldsymbol{V(0,0)}$
Foco	$\boldsymbol{f\left(0, -\frac{1}{3}\right)}$
Ecuación de la Directriz	$\boldsymbol{3y - 1 = 0}$
Longitud del lado recto	$\boldsymbol{\frac{4}{3}}$
Ecuación de la Parábola	$\boldsymbol{x^2 = -\frac{4}{3}y}$



Ejercicio 2. **Verifica que el punto $S(2, -3)$ y $R(-2, -3)$ efectivamente pertenecen a la ecuación encontrada para la parábola en el ejemplo 3.**

Ejercicio 3. **Obtén la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco f en $(4, 0)$.**

Ejercicio 4. **Una parábola tiene su vértice en el origen y su directriz es la recta con ecuación $2x - 5 = 0$. ¿Cuál es la longitud del lado recto?**

Ejercicio 5. **¿Cuál es la ecuación de la parábola cuya gráfica se muestra?**

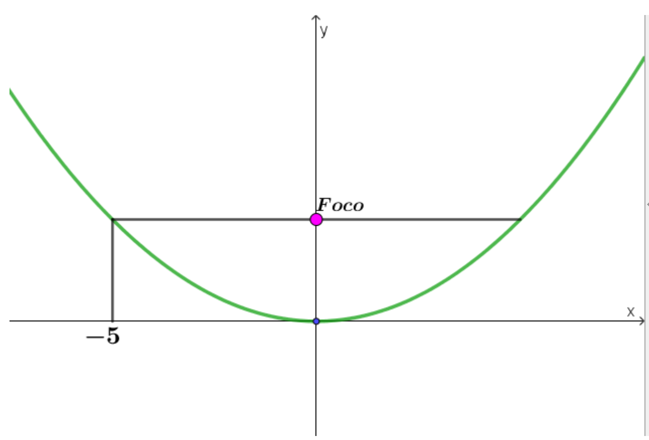
Ejercicio 6. **Encuentra los elementos de la parábola (foco, directriz, longitud del lado recto y vértice) que tiene por ecuación $12y - 8x^2 = 0$.**

Ejercicio 7. **Hallar la ecuación de la parábola que pasa por el punto $A(6, -5)$ si el vértice está en el origen y su eje coincide con el de las ordenadas. Elabora un dibujo.**

Pensamiento crítico

Ejercicio 8. **Encuentra las ecuaciones para las parábolas que tienen vértice en el origen y focos en $f_1\left(0, \frac{1}{8}\right), f_2\left(0, \frac{1}{2}\right),\ f_3(0,1)$ y $f_4(0,4)$. Grafícalas en un mismo plano (puedes ayudarte de un software para graficarlas como GeoGebra, PrimePlane, etc.). ¿Cómo cambian las parábolas? ¿Cuál es la relación que se observa entre el foco y gráfica de la parábola?**

Ejercicio 9. **Por un error tipográfico, no se nos proporciona el vértice de una parábola, aunque sí sabemos que su directriz es la recta $y + 2 = 0$ y el foco es el punto $f(0, 6)$. ¿Podrías ayudarnos a encontrar el vértice? (Sugerencia: elabora un diagrama con los datos proporcionados y utiliza después la condición geométrica que deberán cumplir el conjunto de puntos del lugar geométrico).**



Autoevaluación

Con la idea de animarte a que logres una total comprensión conceptual, te ofrecemos una serie de ejercicios primero de conceptos y, después, de habilidades para que verifiques y compruebes el avance de tu aprendizaje.

CONCEPTOS

Llena los espacios en blanco con la frase que hace la oración correcta.

1. La parábola se define como el conjunto de todos los puntos del plano que son equidistantes con un punto fijo llamado ___________ y de una recta fija llamada ___________ de la parábola.
2. La gráfica de la ecuación $y^2 = 4px$ es una parábola con foco en $f($__ , __$)$ y tiene por ecuación de la directriz $x =$ ______.
3. La gráfica de la ecuación $x^2 = -4py$ es una parábola con foco en $f($__ , __$)$ y tiene por ecuación de la directriz $y =$ ______. Así, la gráfica de $x^2 = -24y$ es una parábola con foco en $f($_, __$)$ y directriz $y =$ _______.

HABILIDADES

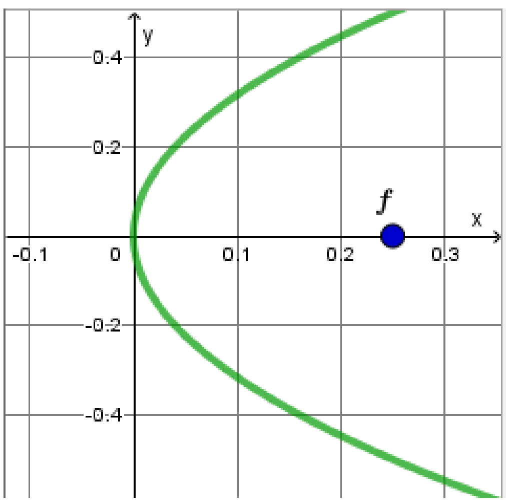
4. La ecuación de la parábola con foco en $f(8,0)$ y vértice en $V(0,0)$ está dada por :
   a) $y^2 = 36x$ b) $x^2 = 32y$ c) $y^2 = 32x$ d) $x^2 = 36y$

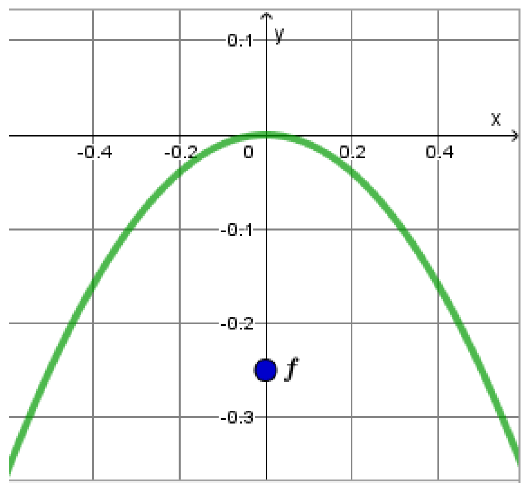
5. Una parábola tiene por ecuación $x^2 - 20y = 0$, su foco f y su directriz D están dadas por:
   a) $f(5,0)$, D: $x + 5 = 0$
   b) $f(0,5)$ D: $y + 5 = 0$
   c) $f(0,-5)$ D: $y - 5 = 0$
   d) $f(-5,0)$ D: $x - 5 = 0$

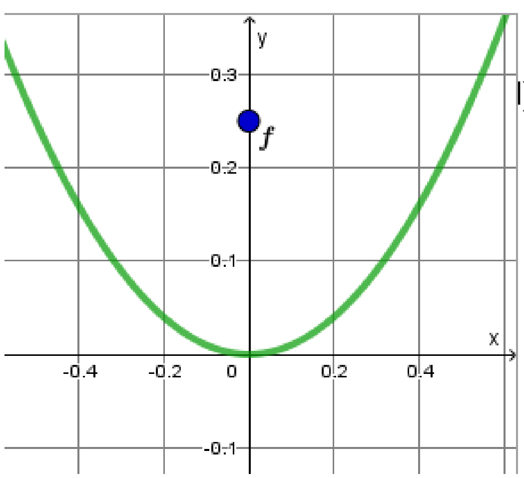
6. ¿Cuáles son los puntos extremos que definen el lado recto de la parábola $y^2 = -10x$?
   a) $R\left(-\frac{5}{2},0\right)$ y $S\left(\frac{5}{2},0\right)$
   b) $R\left(-5,-\frac{5}{2}\right)$ y $S\left(-5,\frac{5}{2}\right)$
   c) $R\left(0,-\frac{5}{2}\right)$ y $S\left(0,\frac{5}{2}\right)$
   d) $R\left(-\frac{5}{2},5\right)$ y $S(-\frac{5}{2},-5)$

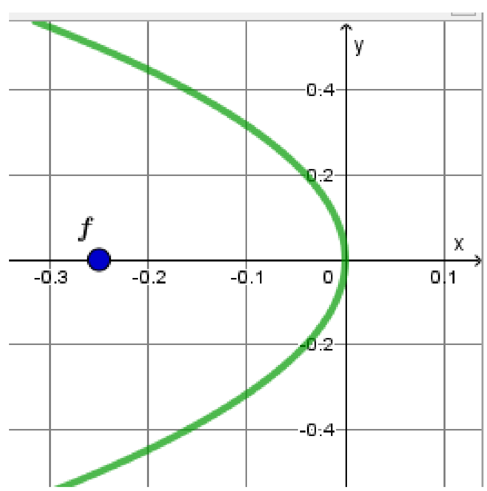
7. La parábola que pasa por el punto $P(-2,-5)$, tiene vértice en el origen y su eje coincide con el eje y, tiene por ecuación:
   a) $5x^2 + 4y = 0$ b) $2y^2 + 25x = 0$
   c) $2y^2 - 25x = 0$ d) $5x^2 - 4y = 0$

8. ¿Cuál gráfica representa a la parábola cuya ecuación es $y = -x^2$?

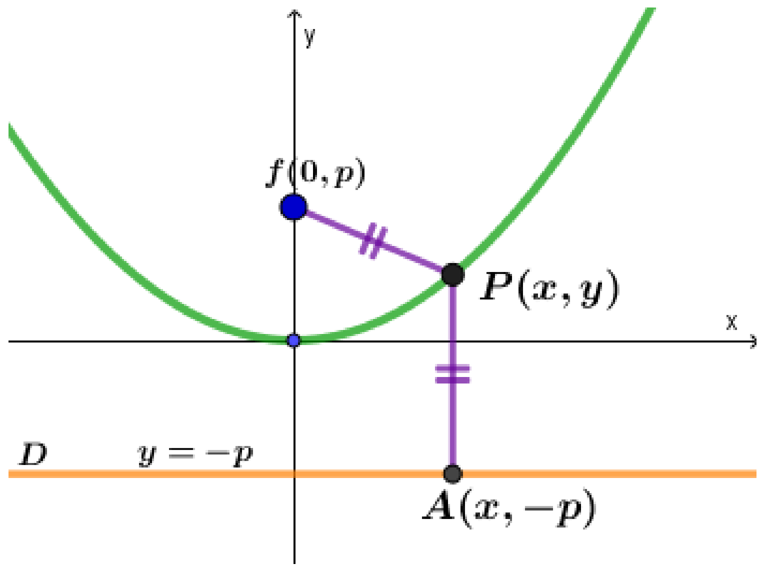
a)


b)


c)


d)


9. Si la directriz de una parábola con vértice en el origen es $2x - 15 = 0$, ¿cuál es la ecuación de dicha parábola?



a) $x^2 + 30y = 0$ b) $2y^2 + 15x = 0$

c) $y^2 + 30x = 0$ d) $2x^2 + 15y = 0$

10. La longitud del lado recto de una parábola es 64. Si el vértice está en el origen y su eje coincide con el eje de las x en el lado positivo, ¿cuál es la ecuación de su directriz?

a) $y + 32 = 0$ b) $x - 32 = 0$

c) $y - 16 = 0$ d) $x + 16 = 0$

<u>Respuestas a los ejercicios propuestos</u>.

Ejercicio 1.

Te mostramos una gráfica en la cual se ha esquematizado las condiciones pedidas.

Nota cómo la distancia de f (foco) a P (cualquier punto de la parábola), es la misma que, de P al punto A (punto de la Directriz), es decir, $\boldsymbol{d_{\overline{fP}}} = \boldsymbol{d_{\overline{PA}}}$ Usando nuevamente la fórmula de la distancia obtendremos:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2}$$

$$\sqrt{(x)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(0)^2 + (y+p)^2}$$

Ahora elevemos al cuadrado ambos lados de la igualdad y simplificamos:

$$\left(\sqrt{(x)^2 + (y-p)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(y+p)^2}\right)^2$$

$$(x)^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$

Desarrollando los binomios indicados y trasponiendo términos:

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$x^2 = y^2 + 2py + p^2 - y^2 + 2py - p^2$$

Para obtener $\boldsymbol{x^2 = 4py}$ que es la ecuación pedida.

Ejercicio 2.

La ecuación que se encontró para la parábola fue $\boldsymbol{x^2 = -\frac{4}{3}y}$. Como el punto S y R pertenecen al lugar geométrico, deberán cumplir con la ecuación encontrada para la parábola. En efecto:

para el punto $S(2,-3)$:

$$(2)^2 = -\frac{4}{3}(-3)$$

$$4 = +\frac{12}{3}$$

$$4 = 4$$

para el punto $R(-2,-3)$:

$$(-2)^2 = -\frac{4}{3}(-3)$$

$$4 = +\frac{12}{3}$$

$$4 = 4$$

Ejercicio 3.

La distancia del vértice al foco es el parámetro p. Al estar el vértice de la parábola en el origen, entonces $p = 4$. También, al estar el foco sobre el eje x en la parte positiva, la ecuación de la parábola será de la forma $y^2 = 4px$. Sustituyendo ahora el valor de p obtendremos

$$y^2 = 4(4)x$$

$y^2 = 16x$ que es la ecuación pedida. Observa que también puede ser escrita como $y^2 - 16x = 0$

Ejercicio 4.

La ecuación de la directriz es $2x - 5 = 0$, que también puede ser escrita como $x = \frac{5}{2}$.

Como nos dicen que el vértice de la parábola está en el origen, entonces $p = \frac{5}{2}$.

Ahora bien, te mostramos que la longitud del lado recto, sin importar hacia donde abra la parábola, es $4p$. Así entonces, al sustituir $4\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{20}{2}$.

Concluimos que la longitud del lado recto es de 10 unidades.

Ejercicio 5.

Si observas con atención la gráfica que se muestra, te darás cuenta que se te está proporcionando la longitud del lado recto. Así, $4p = 10$, es decir, $p = \frac{5}{2}$ y por la forma que tiene la parábola su ecuación tendrá que ser $x^2 = 4py$. Al substituir el valor de p encontrado en esta última ecuación obtenemos:

$x^2 = 10y$ que es la ecuación pedida.

Ejercicio 6.

Lo primero que tienes que hacer es transformar la ecuación de la parábola a una forma conocida, es decir, $-8x^2 = -12y$. Ahora multiplicamos por $-\frac{1}{8}$ de ambos lados de la ecuación y se obtiene $x^2 = \frac{3}{2}y$. Observa que $4p = \frac{3}{2}$ y al despejar a p se tiene que $p = \frac{3}{8}$. Una vez que tenemos el parámetro p, podemos escribir sus elementos de la parábola:

Vértice	$(0,0)$	Foco	$\left(0, \frac{3}{8}\right)$
Directriz	$8y + 3 = 0$	Longitud del lado recto	$\frac{3}{2}$

Ejercicio 7.

Como el eje de la parábola coincide con el eje y y su vértice esta en el origen, su ecuación tendrá que ser de la forma $x^2 = -4py$. El punto A esta en el lugar geométrico, por lo que debe cumplir con la ecuación de la parábola. Sustituyendo las coordenadas del punto A se tiene:

$$(6)^2 = -4p(-5)$$

$$36 = 20p$$

$$\frac{36}{20} = p$$

$$\frac{9}{5} = p$$

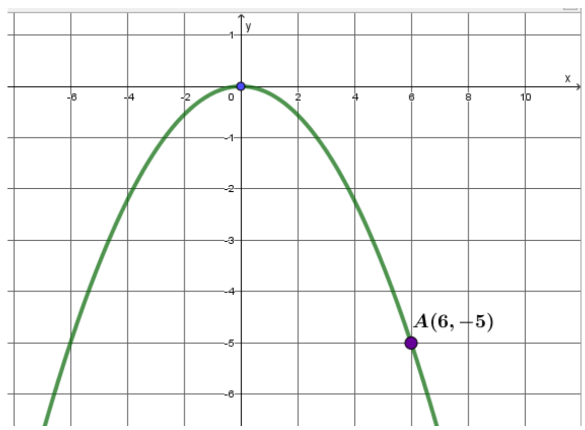
Ahora que sabemos cuánto vale el parámetro p, substituimos en la ecuación propuesta y simplificamos:

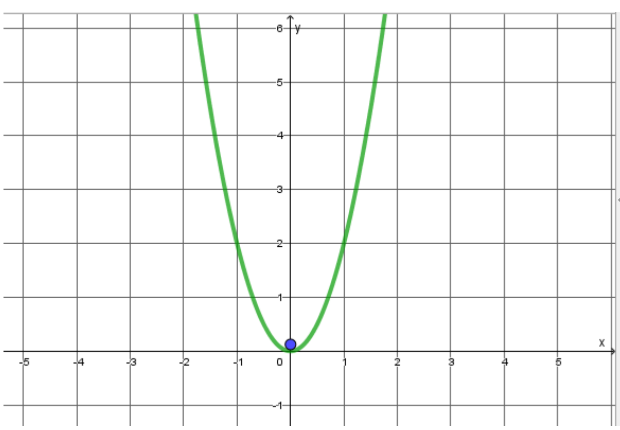
$x^2 = -4\left(\frac{9}{5}\right)y$

$x^2 = -\frac{36}{5}y$ que es la ecuación que cumple con las condiciones especificadas.

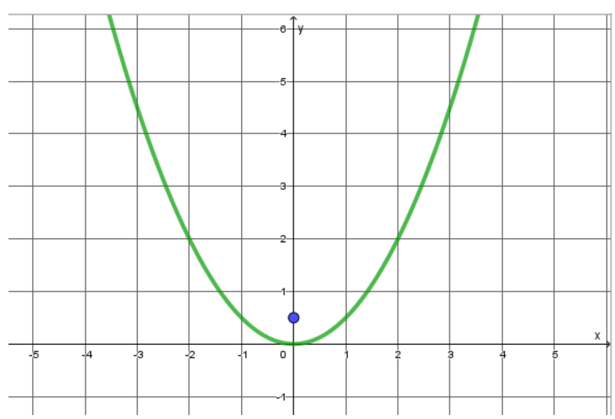
Ejercicio 8.

Como los focos están sobre el eje y en su lado positivo, las parábolas abren hacia arriba y su ecuación básica será de la forma $x^2 = 4py$. Basta con substituir el parámetro p y graficar cada una de ellas.

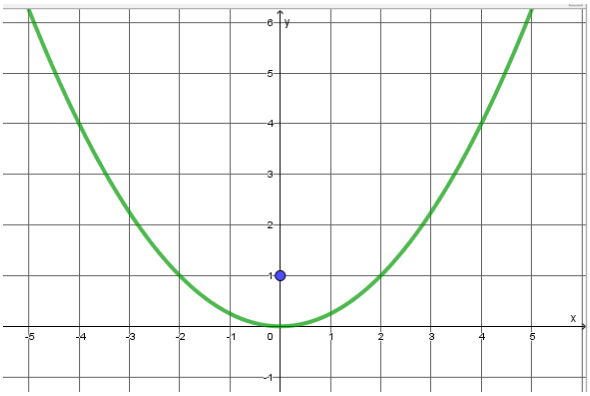




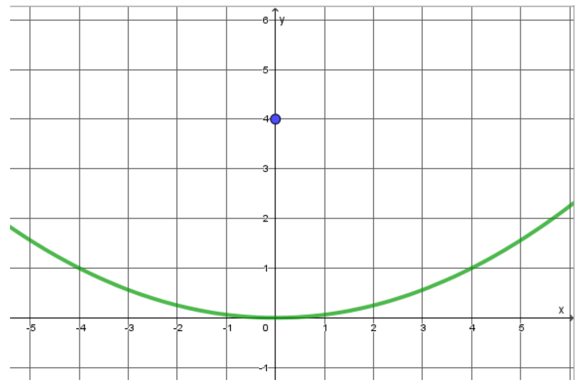
$x^2 = \frac{1}{2}y$



$x^2 = 2y$



$x^2 = 4y$



$x^2 = 16y$

Aunque pueden ser observadas algunas otras características, nos parece que es evidente que, cuanto más cercano está el foco del vértice, más "esbelta" es la parábola.

Ejercicio 9.

Como la sugerencia indica, elaboremos un diagrama con los datos proporcionados.

Sabemos que cualquier punto de la directriz, como el punto Bpor ejemplo, tendrá por coordenadas $B(x,-2)$. También sabemos que cualquier punto $P(x, y)$ del plano que quiera pertenecer al lugar geométrico, deberá cumplir con la condición geométrica de la parábola, a saber: $\boldsymbol{d_{\overline{fP}}} = \boldsymbol{d_{\overline{PB}}}$

Al usar la fórmula de la distancia tendremos:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-6)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-2))^2}$$

$$\sqrt{(x)^2 + (y-6)^2} = \sqrt{(0)^2 + (y+2)^2}$$

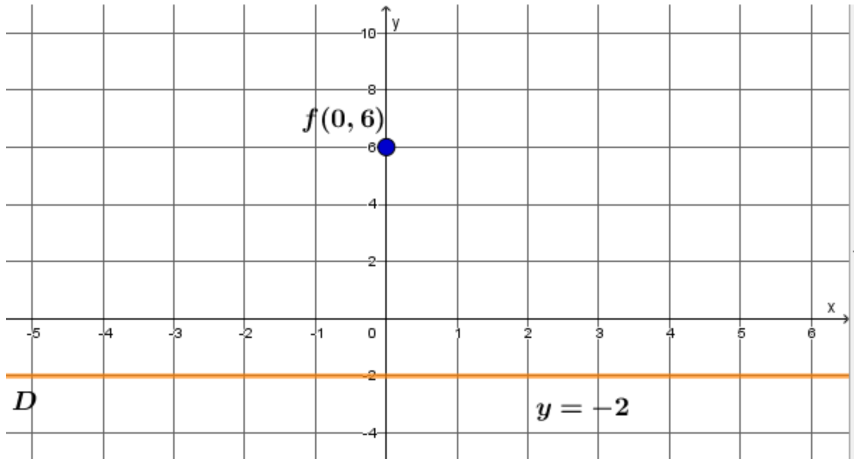
Ahora elevemos al cuadrado ambos lados de la igualdad y simplificamos:

$$\left(\sqrt{(x)^2 + (y-6)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(y+2)^2}\right)^2$$

$$(x)^2 + (y-6)^2 = (y+2)^2$$

Desarrollando los binomios indicados y trasponiendo términos:

$$x^2 + y^2 - 12y + 36 = y^2 + 4y + 4$$



$$x^2 = y^2 + 4y + 4 - y^2 + 12y - 36$$

$$x^2 = 16y - 32$$

Esta última expresión bien la podríamos escribir cómo $(x - 0)^2 = 16(y - 2)$ que se parece a nuestra forma básica $x^2 = 4py$. ¡claro! Aquí $4p = 16$ o bien $p = 4$. La distancia del foco al vértice es p. Se concluye que el vértice de esta parábola esta en el punto $V(0,2)$.

CONCEPTOS

1. <u>Foco</u>, <u>directriz</u>
2. $f(p,0)$, $x = -p$
3. $f(0,-p)$, $y = p$. $f(0,-6)$, $y = 6$.

HABILIDADES

4. c
5. b
6. d
7. a
8. b
9. c
10. d

Bibliografía básica y complementaria

González, P. (2009). *Orígenes y evolución histórica de la geometría analítica*. España.
Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precálculo*. México:Cengage Learning.
Lehmann, C., (2006). *Geometría Analítica*. México: Limusa.

Mesografía:

www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriaanalitica.pdf

Ecuación cartesiana de la parábola con vértice diferente al origen

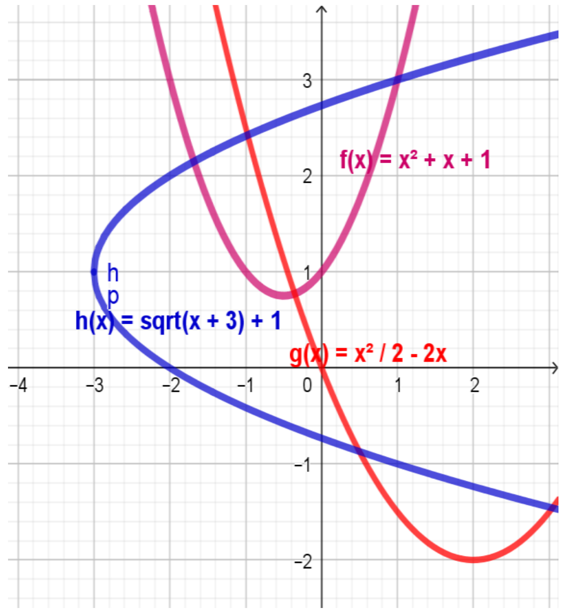


figura 1. Parábolas Horizontales y Verticales

Palabras clave

Ejemplo, es útil para consolidar la comprensión de un concepto, de tal manera que se trata de evitar que surja en el estudiante concepciones alternas no necesarias en el ámbito de las matemáticas.

Ejercicio matemático, es: “Una situación conocida, que es accesible para el estudiante y que es solucionable a través de una secuencia de pasos o algoritmos matemáticos ya conocidos”.

Problema es: “Una situación que provoca un bloqueo inicial, puesto que las técnicas habituales de abordaje no funcionan, por lo que se debe asumir un compromiso para encontrar de manera exploratoria nuevos métodos para darle solución”.

Temática

- **Las Ecuaciones: general y ordinaria de la parábola y la interpretación de sus elementos.**
- **Sistemas de ecuaciones formadas por:**
  - **Una Ecuación lineal y una parábola.**
  - **Dos parábolas**
- **Resolución de problemas en diversos contextos.**
- **Aplicaciones prácticas.**

Aprendizajes

- Transforma la ecuación general a la ordinaria para encontrar sus elementos.

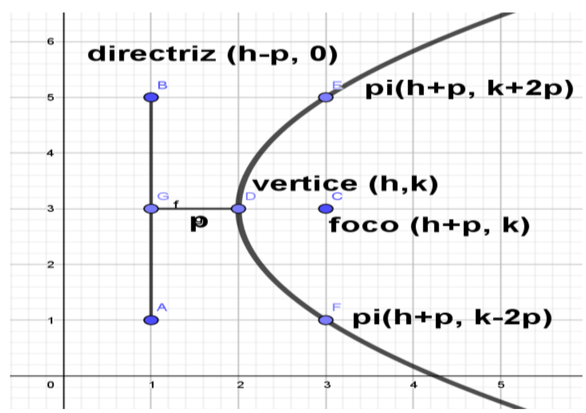
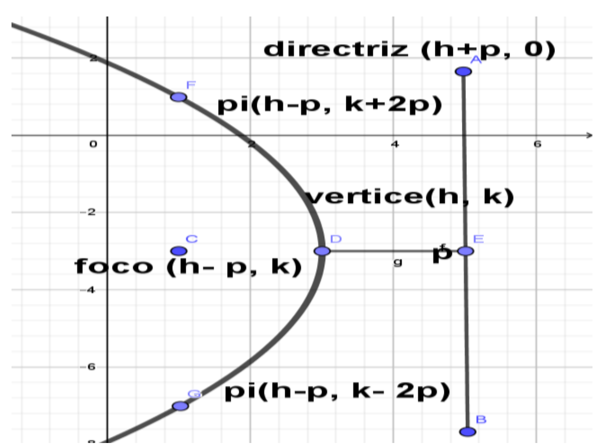
_ Ecuación ordinaria de la parábola y la interpretación de sus parámetros.
_ Ecuación general.

Resumen: Teórico básico

Ecuación ordinaria de la parábola y la interpretación de sus parámetros

Parábola horizontal

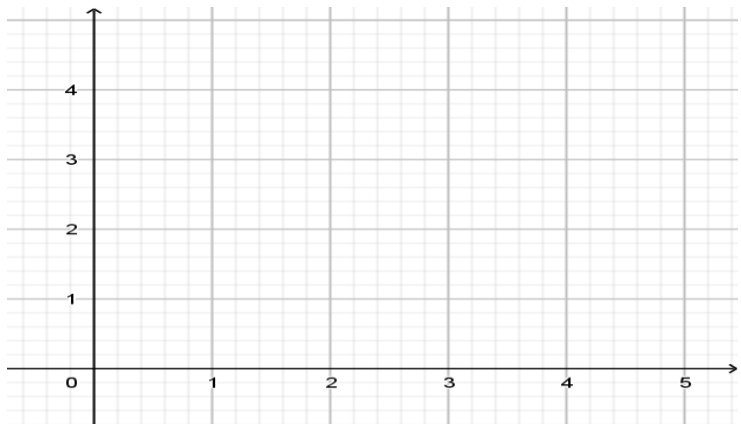
Al iniciar la unidad se obtuvo la ecuación de la parábola con vértice en el origen $y^2 = 4px$, la representación algebraica de la **ecuación ordinaria de la parábola con vértice diferente al origen es:**

Ecuación ordinaria horizontal de la parábola y sus elementos	
$\boxed{(y-k)^2 = 4p(x-h)}$ vértice $\mathbf{V(h,k)}$ $(\mathbf{p})$ distancia entre el foco y el vértice, foco $\mathbf{f(h+p,\ k)}$ eje *focal* $\mathbf{y = k}$ directriz $\mathbf{x = (h-p,\ 0)}$. Los puntos de intersección de la parábola con el lado recto. **P₁** $\mathbf{(h+p,\ k+2p)}$ **P₂** $\mathbf{(h+p,\ k-2p)}$.	
$\boxed{(y-k)^2 = -4p(x-h)}$ vértice $\mathbf{V(h,k)}$ $(\mathbf{p})$ distancia entre el foco y el vértice, foco $\mathbf{f(h+p,\ k)}$ eje *focal* $\mathbf{y = k}$ directriz $\mathbf{x = (h-p,\ 0)}$. Los puntos de intersección de la parábola con el lado recto. **P₁** $\mathbf{(h+p,\ k+2p)}$ **P₂** $\mathbf{(h+p,\ k-2p)}$.	

Nota: La representación de una parábola horizontal, orientada hacia la derecha o hacia izquierda según el signo de $\mathbf{4p}$. en donde $\boldsymbol{h, k}$ son números reales (constantes) y $\boldsymbol{p}$. es distinto de $\mathbf{0}$.

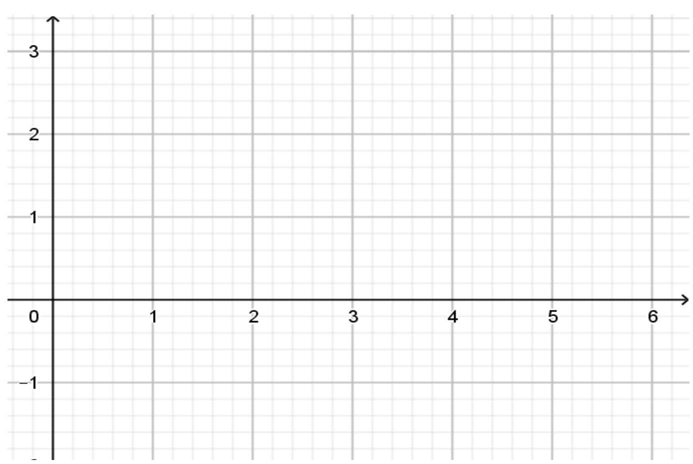
Ejercicio 1.

Obtén la ecuación ordinaria de la parábola, con vértice $(\mathbf{2},\mathbf{3})$ y foco $(\mathbf{3},\mathbf{3})$, ¿Cuál es el valor del parámetro p?, ¿Cuál es la ecuación de la Directriz?, las coordenadas de los puntos de intersección que definen al lado recto. ¿De qué lado de la directriz se encuentra el foco f?. ¿Qué elemento cambiarán de la ecuación ordinaria de la parábola obtenida?

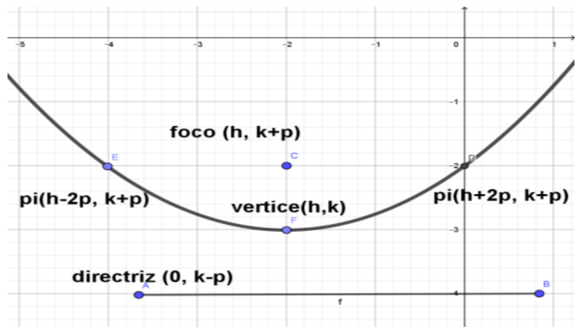
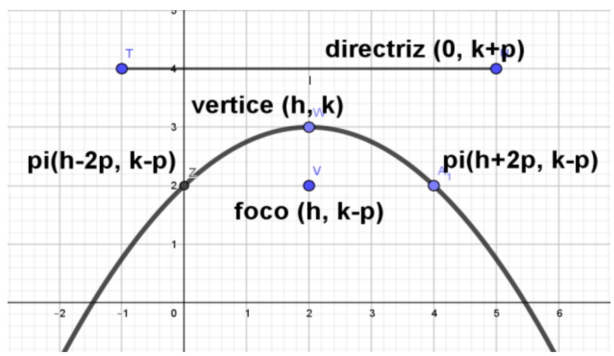


Ejercicio 2.

Obtén la ecuación ordinaria de la parábola con vértice $(\mathbf{3},\mathbf{1})$ y directriz (5,0) por lo que la ecuación de la directriz es: $x = 5$ ¿Cuál es el valor del parámetro p?, ¿Cuáles son las coordenadas del foco?, ¿De qué lado de la directriz se encuentra el foco f?, ¿Seguirá siendo la misma ecuación?, ¿Qué elemento cambiará de la ecuación ordinaria de la parábola obtenida?



Parábola vertical

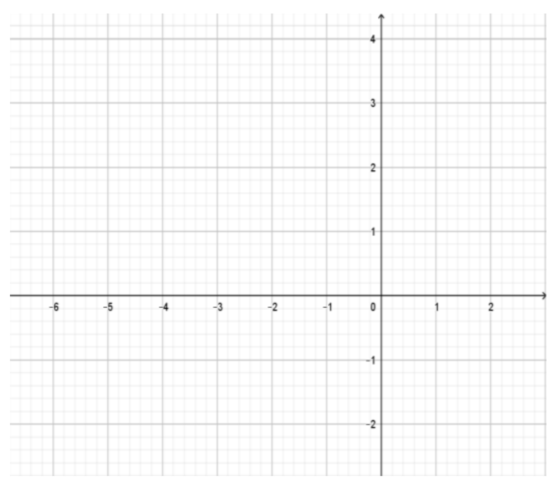
Ecuación ordinaria vertical de la parábola y sus elementos	
$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$ vértice $\mathbf{V(h,k)}$, **(p)** distancia entre el foco y el vértice foco $\mathbf{f(h,\ k+p)}$, eje focal $\mathbf{x=h}$, directriz $\mathbf{y=(k-p)}$ puntos de intersección de la parábola con el lado recto. **P₁** $\mathbf{(h-2p, k+p)}$; **P₂** $\mathbf{(h+2p, k+p)}$	
$$(x-h)^2 = -4p(y-k)$$ vértice $\mathbf{V(h,k)}$, **(p)** distancia entre el foco y el vértice foco $\mathbf{f(h,\ k-\ p)}$, eje focal $\mathbf{x=h}$, directriz $\mathbf{y=(0,k+p)}$ puntos de intersección de la parábola con el lado recto. P_1 $\mathbf{(h-2p, k-p)}$; P_2 $\mathbf{(h+2p, k-p)}$	

Nota: La representación de una parábola vertical, orientada hacia la arriba o hacia abajo según el signo de $\mathbf{4p}$. en donde $\boldsymbol{h, k}$ son números reales (constantes) y $\boldsymbol{p}$. es distinto de $\mathbf{0}$.

Ejercicio 3.

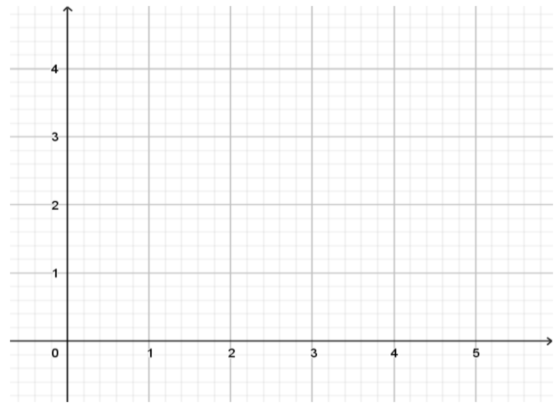
Obtén la ecuación ordinaria de la parábola y esboza su representación gráfica.

Dado el vértice $(\mathbf{-2,2})$ y foco $(\mathbf{-2,3})$**,** ¿Cuál es el valor del parámetro p?, ¿Cuál es la ecuación de la directriz?, las coordenadas de los puntos de intersección que definen al lado recto. ¿En qué posición de la directriz se encuentra el foco f?.



Ejercicio 4.

Obtén la ecuación ordinaria de la parábola y su representación gráfica dado el vértice $(\mathbf{3},\mathbf{3})$ y ecuación de la directriz (0,4), ecuación $\mathbf{y}=\mathbf{4}$, ¿Cuál es el valor del parámetro p?, ¿Cuáles son las coordenadas del foco? las coordenadas de los puntos de intersección que definen al lado recto. ¿De qué lado de la directriz se encuentra el foco f?, ¿Qué elemento cambia de la ecuación ordinaria de la parábola obtenida?



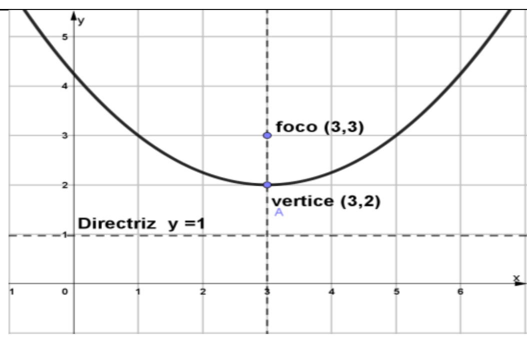
Ecuación ordinaria y la Ecuación general de la parábola

Ejemplo 1. Dada la ecuación ordinaria de la parábola encuentra sus elementos, desarrolle la formula su forma general y bosqueja su gráfica.

$$(\mathbf{x}-\mathbf{3})^{\mathbf{2}}=\mathbf{4}(\mathbf{y}-\mathbf{2})$$

Solución

Como la variable “x” es la que aparece elevada al cuadrado, sabemos que se trata de una parábola cuyo eje de simetría es paralelo al eje “y”.



El vértice es $\mathbf{V}\,(\mathbf{3}.\mathbf{2})$, el valor de $\mathbf{p}=\mathbf{1}$ las coordenadas del foco $\mathbf{f}(\mathbf{3},\mathbf{3})$eje de simetría $\mathbf{x}-\mathbf{3}=\mathbf{0}$, ecuación de la directriz $\boldsymbol{D}$, $\mathbf{y}-\mathbf{1}=\mathbf{0}$, las coordenadas de los puntos de intersección de la parábola con el lado recto son: $P_1\ (\mathbf{1},\mathbf{3})$, $\mathbf{P_2}\ (\mathbf{5},\mathbf{3})$ la magnitud del lado recto es **4**.

La ecuación general: Desarrollando el binomio al cuadrado de primer término

$$(\mathbf{x}-\mathbf{3})^{\mathbf{2}}=\mathbf{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{6x}+\mathbf{9}$$

Aplicando la propiedad distributiva al segundo miembro de la ecuación

$$\mathbf{4}(\mathbf{y}-\mathbf{2})=\mathbf{4y}-\mathbf{8}$$

Reduciendo términos e igualando a cero. $\mathbf{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{6x}+\mathbf{9}-\mathbf{4y}+\mathbf{8}=\mathbf{0}$

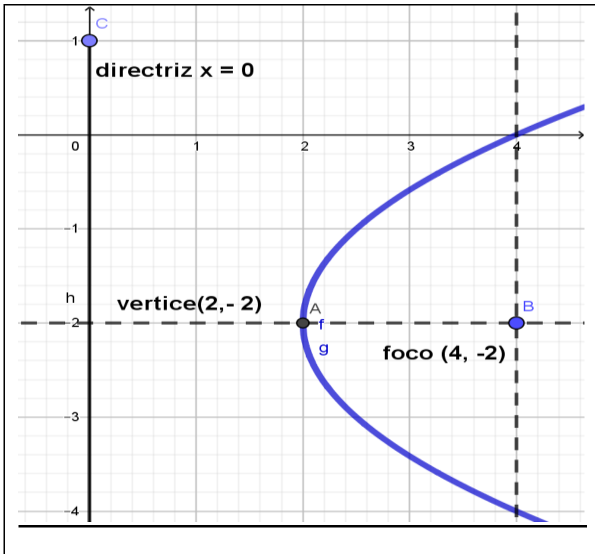
Finalmente se obtiene la ecuación general de la parábola. $\mathbf{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{6x}-\mathbf{4y}+\mathbf{17}=\mathbf{0}$

Ejemplo 2. Dada la ecuación ordinaria de la parábola encuentra sus elementos y desarrollar la ecuación general además bosqueja su gráfica.

$$(\mathbf{y}+\mathbf{2})^{\mathbf{2}}=\mathbf{8}(\mathbf{x}-\mathbf{2})$$

Solución

Como la variable “y” es la que aparece elevada al cuadrado, sabemos que se trata de una parábola cuyo eje de simetría es paralelo al eje “x”.



vértice $\mathbf{v}(\mathbf{2},-\mathbf{2})$,
valor de $\mathbf{p}=\mathbf{2}$, coordenadas del foco $\mathbf{f}(\mathbf{4},-\mathbf{2})$
eje de simetría $\boldsymbol{y}+\mathbf{2}=\mathbf{0}$, la ecuación de la directriz $\mathbf{D}$, $\mathbf{x}=\mathbf{0}$,
coordenadas de los puntos de intersección de la parábola con el lado recto son: $\mathbf{P_1}(\mathbf{4},\mathbf{2})$, $\mathbf{P_2}(\mathbf{4},-\mathbf{6})$
magnitud del lado recto es $\mathbf{8}$.

La ecuación general de la parábola: Desarrollando el binomio al cuadrado del primer término de la igualdad.

$$(\mathbf{y}+\mathbf{2})^{\mathbf{2}}=\mathbf{y}^{\mathbf{2}}+\mathbf{4y}+\mathbf{4}$$

Aplicando la propiedad distributiva en el segundo termino $\mathbf{8}(\mathbf{x}-\mathbf{2})=\mathbf{8x}-\mathbf{16}$ despejando términos e igualando a cero,

$$\mathbf{y}^{\mathbf{2}}+\mathbf{4y}+\mathbf{4}-\mathbf{8x}+\mathbf{16}=\mathbf{0}$$

Reduciendo términos semejantes e igualando a cero se tiene obtiene la ecuación general de la parábola. $\mathbf{y}^{\mathbf{2}}+\mathbf{4y}-\mathbf{8x}+\mathbf{20}=\mathbf{0}$

- ✓ Para el desarrollo de los siguientes ejercicios es recomendable que utilices el resumen teórico básico, repases detenidamente los ejemplos 1 y 2, desarrollados previamente, recuerda además que puedes acudir a las asesorías que brinda el plantel**.**

Ejercicio 5. Ecuación ordinaria y la interpretación de los elementos de la Parábola

Encuentra los elementos de la parábola: vértice, valor de p, foco, ecuación de la directriz, coordenada de los puntos de intersección, y la magnitud del lado recto, bosqueja la gráfica y determina la ecuación general, dadas las siguientes ecuaciones ordinarias.

a) $(\mathbf{x}+\mathbf{2})^{2}=\mathbf{8}(\mathbf{y}-\mathbf{4})$

b) $(\mathbf{x}-\mathbf{1})^{2}=-\mathbf{2}(\mathbf{y}-\mathbf{3})$

c) $(\mathbf{x}+\mathbf{3})^{2}=\mathbf{4}(\mathbf{y}+\mathbf{1})$

d) $(\mathbf{y}+\mathbf{2})^{2}=-\mathbf{6}(\mathbf{x}+\mathbf{2})$

e) $(\mathbf{y}-\mathbf{3})^{2}=\mathbf{4}(\mathbf{x}-\mathbf{2})$

f) $(\mathbf{y}-\mathbf{4})^{2}=-\mathbf{2}(\mathbf{x}+\mathbf{3})$

La solución de los ejercicios al final de la unidad.

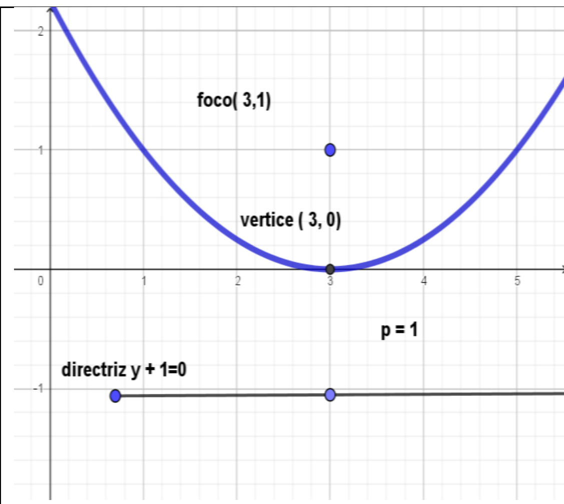
Transformar la ecuación general a la ecuación ordinaria de la parábola.

Ejemplo 3. Transforma la ecuación general de parábola a la ecuación ordinaria, especificar sus elementos y bosquejar su gráfica.

$$\mathbf{x}^{2}-\mathbf{6x}-\mathbf{4y}+\mathbf{9}=\mathbf{0}$$

Solución. Agrupando términos semejantes, completando cuadrados y despejando.

$$\mathbf{x}^{2}-\mathbf{6x}+\mathbf{9}=\mathbf{4y}$$
$$(\mathbf{x}-\mathbf{3})^{2}=\mathbf{4}(\mathbf{y}-\mathbf{0})$$



vértice $(\mathbf{3},\mathbf{0})$, $\mathbf{p}=\mathbf{1}$, foco $(\mathbf{3},\mathbf{1})$, Directriz $\mathbf{y}+\mathbf{1}=\mathbf{0}$, la magnitud del lado recto $\mathbf{4}$

Ejemplo 4. Transformar la ecuación general de parábola a la ecuación ordinaria, especificar sus elementos y bosquejar su gráfica.

$$\mathbf{x}^{2}-\mathbf{4x}+\mathbf{8y}+\mathbf{12}=\mathbf{0}$$

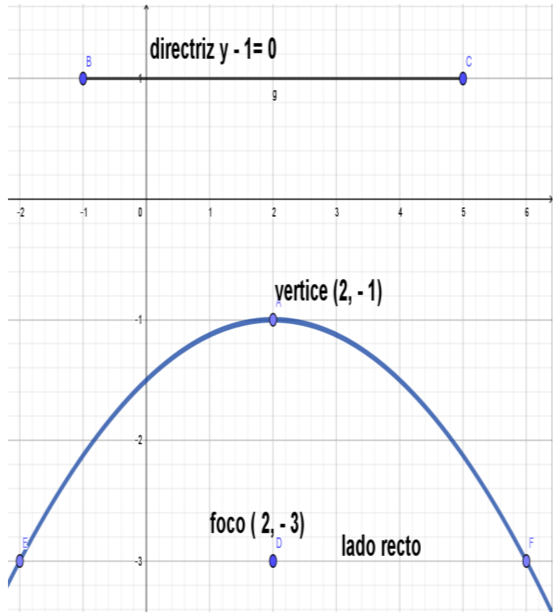
Solución

Agrupando términos semejantes, completando cuadrados y despejando

$$\mathbf{x^2 - 4x + 2^2 = -8y - 12 + 2^2}$$

$$\mathbf{x^2 - 4x + 4 = -8y - 8}$$

$$\mathbf{(x - 2)^2 = -8(y + 1)}$$



Vértice $(\mathbf{2}, -\mathbf{1})$ $\mathbf{p} = \mathbf{2}$, foco $(\mathbf{2}, -\mathbf{3})$, $directriz$ $\mathbf{D}$, $\mathbf{y - 1 = 0.}$ Magnitud del Lado recto $\mathbf{8}$.

Ejemplo 5. Transformar la ecuación general de la parábola a la ecuación ordinaria especificar sus elementos y bosquejar su gráfica.

$$\mathbf{y^2 - 8x + 4y - 4 = 0}$$

<u>Solución</u>

Agrupando términos semejantes, completando cuadrados y despejando.

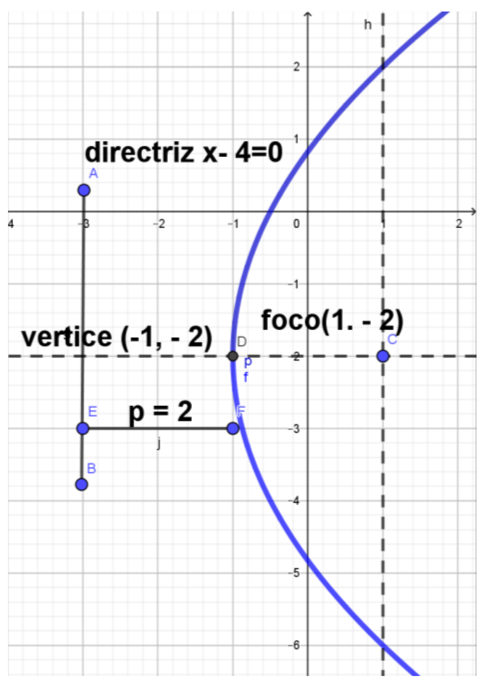
$$\mathbf{y^2 + 4y + \ = 8x + 4}$$

$$\mathbf{y^2 + 4y + (2)^2 = 8x + 4 + (2)^2}$$

$$(\boldsymbol{y} + \mathbf{2})^{\mathbf{2}} = \mathbf{8x + 8}$$

$(\boldsymbol{y} + \mathbf{2})^{\mathbf{2}} = \mathbf{8(x + 1)}$; $\mathbf{4}\boldsymbol{p} = \mathbf{4}$La ecuación ordinaria de la parábola

$$\mathbf{(y + 1)^2 = -8(x - 2)}$$



En donde Vértice $(\mathbf{-1}, \mathbf{-2})$, p $= \mathbf{2}$, foco $(\mathbf{1}, \mathbf{-2})$, directriz $\mathbf{x - 4 = 0.}$ Magnitud del lado recto $\mathbf{8.}$

✓ Para que desarrolles los siguientes ejercicios se recomienda que repasar detenidamente los ejemplos 3, 4 y 5, desarrollados previamente, recuerda además que puedes acudir a las asesorías de matemáticas que brinda el plantel.

Ejercicio 6. Transformar la ecuación general a la ecuación ordinaria de la parábola

Obtén la ecuación ordinaria, determina las coordenadas del vértice, el valor del parámetro "p", las coordenadas del foco, la ecuación de la Directriz y la magnitud del lado recto.

a) $\mathbf{x^2 + 8x + 6y + 22 = 0}$

b) $\mathbf{y^2 + 4y + 6x - 5 = 0}$

c) $\mathbf{x^2 + 4x - 2y + 8 = 0}$

d) $\mathbf{y^2 + 2y + 20x - 39 = 0}$

e) $\mathbf{x^2 - 4y + 8 = 0}$

f) $\mathbf{y^2 + 4y + 6x - 5 = 0}$

Solución de los ejercicios al final de la unidad.

Puntos de la intersección de una recta con una parábola y entre dos parábolas.

Aprendizajes

- Resolver problemas que involucran la intersección de una recta con una parábola y entre parábolas.
  Sistemas de ecuaciones formadas por:
  - Una Ecuación lineal y una parábola.
  - Dos parábolas

Ejemplo 6. Sistema formado por una recta y una parábola.

Encuentra los puntos de intersección, dado el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\mathbf{(y+1)^2 - 4x = 0}$$
$$\mathbf{4y - 3x + 12 = 0}$$

<u>Solución</u>

Aplicando el método de igualación para la solución de sistemas de ecuaciones. Despejando la variable x" en ambas ecuaciones.

$$\mathbf{(y+1)^2 = 4x} \qquad \mathbf{4y+12 = 3x}$$

$$\mathbf{\frac{(y+1)^2}{4} = x} \qquad \mathbf{\frac{4y+12}{3} = x}$$

Igualando, desarrollando términos en ambos lados de la igualdad.

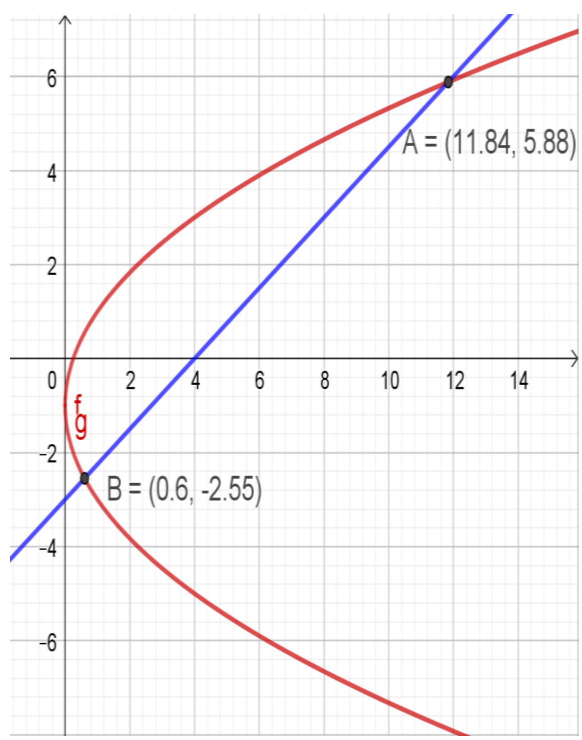
$$\mathbf{3(y+1)^2 \;=\; 4(4y+12)}$$

$$\mathbf{3(y^2+2x+1) \;=\; 16y+48}$$

Se determina la ecuación cuadrática
$\mathbf{3y^2 - 10y - 45 = 0}$
Utilizando la formula general de las cuadráticas $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ se encuentran dos valores de

$y_1 = -2.55$, $y_2 = 5.8$.

con los dos valores de y" encontrado se determinan los valores de $x_1 = 0.6$, $x_2 = 11.8$, por lo que los puntos de intersección encontrados son: $\mathbf{P(0.6, -2.55)}$; $\mathbf{P2(11.8, 5.8)}$, los cuales son la solución al sistema planteado.



Ejemplo 7. Sistema de ecuaciones formado por dos parábolas.

Encuentre los puntos de intersección, dado el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\mathbf{x^2 - 24 = 8y,}$$

$$\mathbf{(x-3)^2 = 4(y+3)}$$

Solución

Despejando la variable y” en ambas ecuaciones.

$$\frac{\mathbf{x^2 - 24}}{\mathbf{8}} = \mathbf{y} \qquad \left(\frac{\mathbf{(x-3)^2 - 12}}{\mathbf{4}}\right) = \mathbf{y}$$

Igualando y despejando la variable x”

$$\mathbf{x^2 - 24} = \mathbf{8}\left(\frac{\mathbf{(x-3)^2 - 12}}{\mathbf{4}}\right)$$

$$\mathbf{x^2 - 24 = 2(x-3)^2 - 24}$$

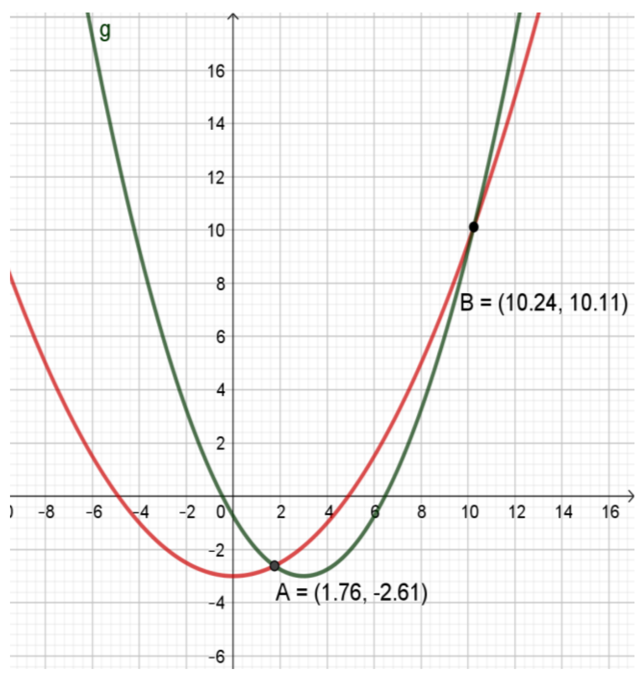
$$\mathbf{x^2 = 2(x-3)^2}$$

$$\mathbf{x^2 = 2x^2 - 12x + 18}$$

$$\mathbf{x^2 - 12x + 18 = 0}$$

Resolviendo la ecuación cuadrática , se tiene que los valores de $\mathbf{x1 = -2.6}$; $\mathbf{x2 = 10.1.}$ Sustituyendo en la ecuación despejada de la variable y”, se obtienen los valores de “y por lo que los puntos de intersección de las dos parábolas son:

$$\mathbf{p1(-2.6, 1.76,)}; \quad \mathbf{p2(10.24, 10.1)}$$



- ✓ Para que desarrolles los siguientes ejercicios se recomienda que repasar detenidamente los ejemplos 6 y 7, desarrollados previamente, recuerda además que puedes acudir a las asesorías de matemáticas que brinda el plantel.

Ejercicio 7. Sistema formado por una recta y una parábola y entre dos parábolas.

Obtén Los puntos de intersección (solución al sistema) de una recta con una parábola y entre dos parábolas.

Una recta y una parábola	Dos parábolas
$a)$ $\boldsymbol{x-2y+7=0}$ $\boldsymbol{x^2-10x-8y+41=0}$	d) $\boldsymbol{x^2-4x-4y-8=0}$ $\boldsymbol{y^2-8y-8x+32=0}$
b) $\boldsymbol{x-y-21=0}$ $\boldsymbol{-y^2-x+8y+21=0}$	e) $\boldsymbol{x^2+2y-2x-8=0}$ $\boldsymbol{x^2-8y+16=0}$
c) $\boldsymbol{x+2y+9=0}$ $\boldsymbol{x^2+6x+4y+13=0}$	f) $\boldsymbol{x^2-4x-8y-20=0}$ $\boldsymbol{x^2-10x-8y+41=0}$

La solución de los ejercicios al final de la unidad.

Problemas de aplicación.

Aprendizajes

- **Resuelve problemas de aplicación.**

Rutina de pensamiento para resolver un problema de matemáticas

Lee despacio y atentamente el enunciado, anota los datos iniciales del planteamiento dado. Utiliza un dibujo sencillo para representar lo que dice en el planteamiento. Redacta algunas preguntas, piensa uno o varios posibles resultados. Aplica conocimientos previos, reconoce posibles semejanzas, contrastar la solución encontrada., ¿tiene sentido?

Ejemplo 8 **Planteamiento de problemas:** El diámetro de una antena parabólica es de 12 m y su profundidad es de 4 m, además se sabe que pasa por el punto (5,9) obtenga la localización de su foco.

Analiza y responde las siguientes preguntas.
¿Cuál es la representación algebraica de la parábola con vértice diferente al origen?, ¿Cuáles son los elementos de la parábola que se mencionan en el planteamiento?,¿Cuáles son las coordenadas del vértice?
¿Es posible realizar la representación gráfica?

Solución.

Identificación de los datos:

Diámetro = 12 m y Profundidad 4 m

p (5,9)

Tomando en cuenta la ecuación de la parábola horizontal. V (0, 3)

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

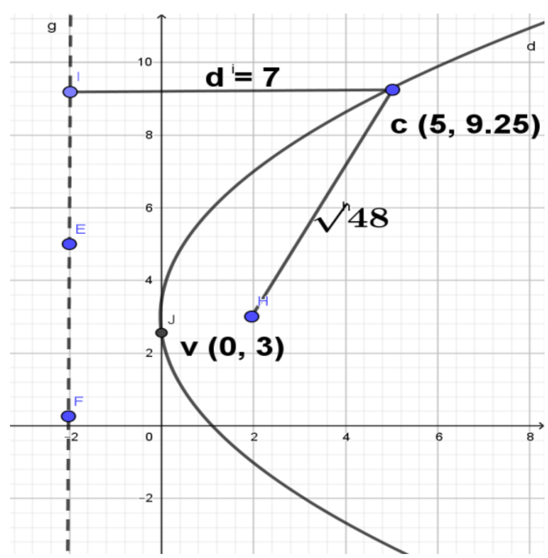
$foco\ ((h+p), k)$

Sustituyendo el valor del punto en $(y-k)^2 = 12(x-h))$

$$(9.25-3)^2 = 4p(5-0)$$

$$(6.)^2 = 20p$$

Despejando el valor de $p = \frac{36}{20} = 1.8$



$$(y-3)^2 = 4(1.8)(x-0)$$

Finalmente, la ecuación encontrada $(y-3)^2 = 7(x-0)$ y las coordenadas del foco (1.8, 3).

Ejemplo 9

Un huerto tiene actualmente 25 árboles que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que, por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos.

Identificación de las variables mencionadas 25 árboles, x árbol adicional, producción de frutos 600 menos disminución de 15 frutos.

a) Modelo algebraico del planteamiento.
b) ¿Cuál es la producción actual del huerto?
c) Estime la producción que se tendría de cada árbol si se plantan x" arboles más.
d) Señale. cuál debe ser el número de árboles que debe tener el huerto para que la producción sea máxima.

<u>Solución</u>

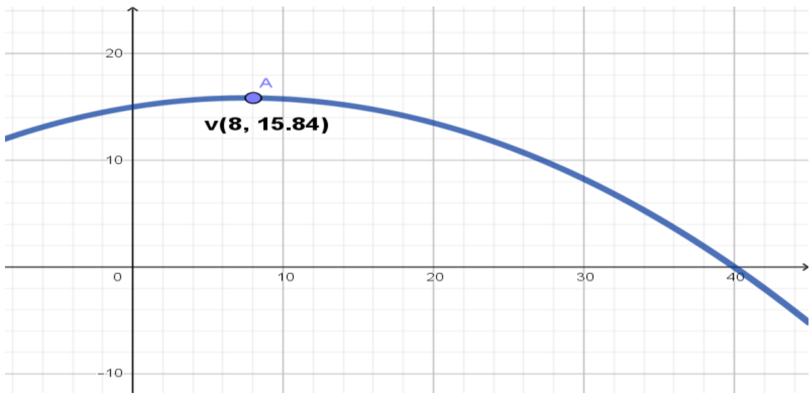
Variables: árboles y frutos $(25+\mathrm{x})(600-15\mathrm{x}) = 25(600) + 600\mathrm{x} - 375\mathrm{x} - 15\mathrm{x}^2$

Multiplicando y ordenando por el grado del polinomio se tiene

a) Modelo Algebraico $-15x^2 + 225x + 15000$
b) La producción actual es de 15,000 frutos

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(*)	Cantidades multiplicadas por miles										
	15	15.2	15.3	15.4	15.5	15.6	15.7	15.81	15.84	15.84	15.81

c) De la tabla en promedio por árbol nuevo serian 100 frutos más.
d) Al observar la tabla se deduce que entre $8\ y\ 9$ árboles más dan la producción máxima que sería de $15{,}840$ frutos.



10.- Equilibrio del mercado, la función de demanda de una cierta marca de auriculares es $d(x) = -\,0.025x^2 - 0.5x + 60$ y la función de oferta correspondiente está dada por $s(x) = 0.02x^2 + 0.6x + 20$, donde d(x) y s(x) están en dólares y x en millares. Determine la cantidad y el precio de equilibrio.

Solución

Resolver el sistema de ecuaciones:

oferta = demanda.

$-\,0.025x^2 - 0.5x + 60 \quad = \quad 0.02x^2 + 0.6x + 20$

$0.045x^2 + 1.1x - 40 = 0$, multiplicando por 1000

y dividiendo entre 5 se tiene $45x^2 + 1{,}100x - 40{,}000 = 0$

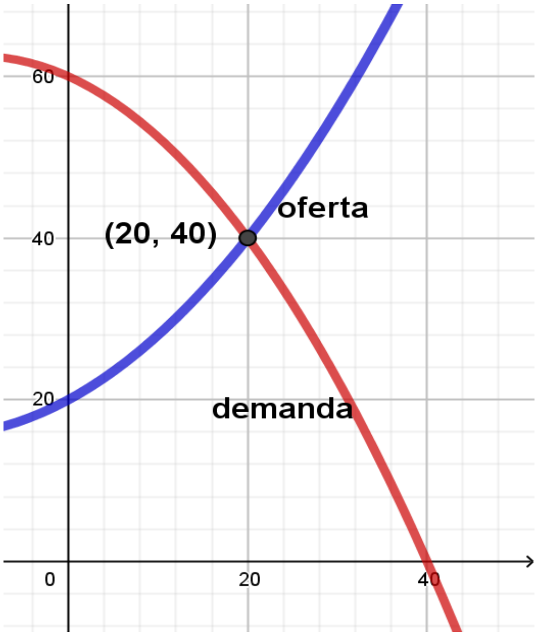
$9x^2 + 220x - 8{,}000 = 0$ factorizando o bien aplicando

la ecuación general de las cuadráticas se tiene

$(9\mathrm{x} + 400)(x - 20)$ se descarta la raíz negativa $x = -\frac{400}{9}$

La cantidad de auriculares es de 20,000

Sustituyendo en la función de oferta el valor encontrado $s(x) = 0.02x^2 + 0.6x + 20$ se obtiene que $0.02(2)^2 + 0.6(20) + 20$ por lo que el precio por auricular será de $40



- ✓ Para que desarrolles los siguientes ejercicios se recomienda que repasar detenidamente los ejemplos 8, 9 y 10 desarrollados previamente, recuerda además que puedes acudir a las asesorías de matemáticas que brinda el plantel.

Ejercicio 8. Los siguientes planteamientos son ejemplos de las posibles aplicaciones lo cual no es reflejo de la totalidad de estos, en diferentes aspectos de la vida real.

1.- Calcular las dimensiones de una figura regular para que su área sea máxima, teniendo en cuenta que su perímetro es de 100 cm.

2.- Una ventana es diseñada para permitir el mayor paso de luz, la cual tiene la forma de un rectángulo rematado por un semicírculo. La única restricción es que su perímetro total es de 28 m. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones?

3.- Punto de equilibrio del mercado. Un fabricante suministra (oferta).

$f(x) = 3x^2 - 4x$ de un producto al mercado, del cual los consumidores (demanda) $f(x) = -x^2 + 24$. las cantidades están dadas en miles.

Determine el punto de equilibrio para conocer cuál es el número de artículos que se deben vender y precio del articulo con el cual el fabricante recupera sus gastos de operación. El punto de equilibrio debe cumple que (oferta = demanda).

Autoevaluación

1.- Identifica si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos**.**

a) Es posible que una parábola intercepte a su directriz. ____________________

b) Si el vértice y el foco de una parábola están sobre una línea recta horizontal entonces la directriz es una recta perpendicular. ___________________________

c) La distancia entre el foco y la directriz es siempre es igual a 2p____________

d) La recta es tangente a la parábola si pasa únicamente por el vértice ______

2.- ¿Como se puede determinar de manera directa la longitud del lado recto?

____

3.- Identifica con una cruz únicamente a las funciones cuadráticas.

Función	función cuadrática
a) $f(x) = x(x^2 + 2)$	
b) $f(x) = 2x^2 + +3x + 1$	
c) $\mathrm{f(x)} = 10x + 4$	
d $f(x) = (x-1)^2$	

4.- Obtener las coordenadas del vértice, el valor de p", y la ecuación de la directriz dada la forma ordinaria de la parábola $\mathrm{y} = (\mathrm{x}+2)^2 - 4$

a) $\mathrm{v}(2,4), \mathrm{p} = 2,$ y = -4

b) $\mathrm{v}(-2,-4),\ \mathrm{p} = \frac{1}{4},\ \mathrm{y} = 3.75$

c) $\mathrm{v}(-2,-4), \mathrm{p}=-2, \mathrm{y}=1/4$

d) $\mathrm{v}(2,4), \mathrm{p}=\frac{2}{4}, \mathrm{y}=3$

5.- Determinar cuál es la ecuación general dada ecuación ordinaria de la parábola. $(y+2)^2=-6(x+2)$

a) $y^2+4\mathrm{y}+6\mathrm{x}+16=0$

b) $y^2-4\mathrm{y}+6\mathrm{x}-8=0$

c) $\mathrm{y}-6x^2+2\mathrm{x}-4=0$

d) $y^2+2^2=-6\mathrm{x}-12=0$

6.- La ecuación general si el v (- 3,1) y las coordenadas del f (- 3,3)

a) $x^2+4\mathrm{y}+6\mathrm{x}+16=0$

b) $x^2+3\mathrm{x}-9\mathrm{y}+9=0$

c) $y^2+4\mathrm{y}+6\mathrm{x}+6=0$

d) $x^2+6\mathrm{x}-8\mathrm{y}+17=0$

7.- Obtener las características de la parábola $-x^2+8x-y-15=0$.

a) $\mathrm{v}(1,4), \mathrm{p}=1, \mathrm{f}(4,1), \mathrm{y}=-1$

b) $\mathrm{v}(-4,-1), \mathrm{p}=-\frac{1}{4}, \mathrm{f}(0.5,4),\ \mathrm{y}=3.75$

c) $\mathrm{v}(4,1), \mathrm{p}=-\frac{1}{4}, \mathrm{f}(4,0.5),\ \mathrm{y}=1.25$

d) $\mathrm{v}(2,8), \mathrm{f}(4,4), \mathrm{p}=\frac{2}{4}, \mathrm{y}=3$

8.- Obtener las coordenadas de los puntos de intersección dado el sistema de una recta y una parábola. $y^2+4\mathrm{y}+6\mathrm{x}+6=0$ con $\mathrm{y}=2\mathrm{x}$ -7

a) $\mathrm{p1}(3.7,0.5), \mathrm{p2}(7.3,7.6)$

b) $\mathrm{p1}(0.5, 3.7), \mathrm{p2}(7, 6)$

c) $\mathrm{p1}(0.7, 1.5), \mathrm{p2}(3, 6.5)$

d) $\mathrm{p1}(0.6, 0.5), \mathrm{p2}(6, 3)$

9.- Determina la cantidad y el precio de equilibrio, dadas las funciones de demanda y de oferta. Recuerda que la oferta debe ser igual a la demanda.

$p = -0.1x^2 - x + 40$ Demanda

$p = 0.1x^2 + 2x + 20$ oferta

donde p está miles de pesos y x en cientos.

a) $\mathrm{x} = 50\ \text{articulos, con un valor de \$ 400}$

b) $\mathrm{x} = 20\ \text{articulos, con un valor de \$4,400}$

c) $\mathrm{x} = 100\ \text{articulos, con un valor de \$ 3,400}$

d) $\mathrm{x} = 500\ \text{articulos, con un valor de \$ 34,400}$

10.- Obtener las dimensiones de un rectángulo para que su área sea máxima, teniendo en cuenta que su perímetro es de 100 cm

a) $\mathrm{v}(30, 900), \text{area maxima } 900$

b) $\mathrm{v}(25, 625), \text{area maxima } 625$

c) $\mathrm{v}(40, 1600), \text{area maxima } 1600$

d) $\mathrm{v}(20, 400), \text{area maxima } 400$

Bibliografía de consulta

González, P. (2009). Orígenes y evolución histórica de la geometría analítica. España. *www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriaanalitica.pdf*

Swokowski, E., Cole, J. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* (13ª ed.) México: CENGAGE Learning.

Lehmann, C. (2008) *Geometría Analítica.* México: Limusa.

https://es.khanacademy.org/math/algebra/quadratics/factored-form-alg1/e/zero-product-property

http://mcj.arrakis.es/alkhwa.htm

http://www.prepa5.unam.mx/wwwP5/profesor/publicacionMate/13IX.pdf
problemas

http://www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/bachillerato/libros/algebra_angel_cap8.pdf

Solución de los ejercicios propuestos

Ejercicios: 1 y 2, parábola horizontal.
Solución ejercicio1

$(\boldsymbol{y}-\mathbf{3})^{\mathbf{2}}=\mathbf{4}(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})$, parámetro $\mathbf{p}=\mathbf{1}$, directriz $\mathbf{x}=\mathbf{1}$ coordenadas de los puntos de intersección $\mathbf{pi}(\mathbf{3},\mathbf{5}),\mathbf{pi}(\mathbf{3},\mathbf{1})$.
Solución ejercicio 2

$(\boldsymbol{y}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}}=-\mathbf{4}\,(\mathbf{2})(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})$, parámetro $\boldsymbol{p}=\mathbf{2}$, directriz $\mathbf{x}=\mathbf{5}$, las coordenadas de los puntos de intersección $\mathbf{pi}(\mathbf{1},\mathbf{5}),\mathbf{pi}(\mathbf{1},-\mathbf{3})$.

Ejercicios: 3 y 4, parábola vertical.
Solución ejercicio 3

El valor de $\mathbf{p}=\mathbf{2},$ la ecuación ordinaria es $(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})^{\mathbf{2}}=\mathbf{4}(\mathbf{2})(\boldsymbol{y}-\mathbf{1})$, ecuación de la directriz, y = -1, pi (2,3), pi (-4,3), el foco se encuentra por encima de la directriz.

Solución ejercicio 4

El valor de $\mathbf{p}=\mathbf{1},$ la ecuación ordinaria es $(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})^{\mathbf{2}}=-\mathbf{4}(\mathbf{1})(\boldsymbol{y}-\mathbf{3})$, ecuación de la directriz, $\mathbf{y}=\mathbf{4}$, las coordenadas del foco $(\mathbf{3},\mathbf{2})$, $\mathbf{pi}(\mathbf{1},\mathbf{2}),\mathbf{pi}\,(\mathbf{5},\mathbf{2})$, el foco se encuentra por debajo de la directriz, el elemento que cambia es el signo del segundo término de la igualdad.

Ejercicio 5 Obtener la ecuación general a partir de la ecuación ordinaria, determinación los elementos de la parábola y su representación gráfica.

a) $(\mathbf{x}+\mathbf{2})^{\mathbf{2}} = \mathbf{8}(\mathbf{y}-\mathbf{4})$

b) $(\mathbf{x}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}} = -\mathbf{2}(\mathbf{y}-\mathbf{3})$

c) $(\mathbf{x}+\mathbf{3})^{\mathbf{2}} = \mathbf{4}(\mathbf{y}+\mathbf{1})$

d) $(\mathbf{y}+\mathbf{2})^{\mathbf{2}} = -\mathbf{6}(\mathbf{x}+\mathbf{2})$

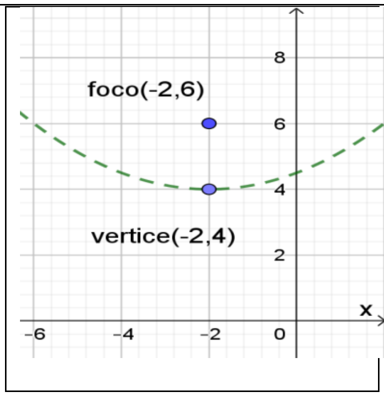
e) $(\mathbf{y}-\mathbf{3})^{\mathbf{2}} = \mathbf{4}(\mathbf{x}-\mathbf{2})$

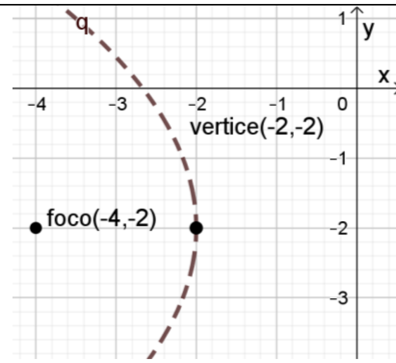
f) $(\mathbf{y}-\mathbf{4})^{\mathbf{2}} = -\mathbf{2}(\mathbf{x}+\mathbf{3})$

ejercicios	a	b	c	d	e	f
Vértice	$(-2,4)$	$(1,3)$	$(-3,-1)$	$(-2,-2)$	$(2,3)$	$(-3,4)$
Valor “p	2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
foco	$(-2,6)$	$(1,2.5)$	$(-3,0)$	$(3.5,-2)$	$(3,3)$	$(-3.5,4)$
Eje de simetría	$x=-2$	$x=1$	$x=-3$	Y$=-2$	$y=3$	$y=4$
Ecuación de la directriz	$y=2$	$y=3.5$	$y=-2$	$x=\frac{1}{2}$	$x=1$	$x=-2.5$
Puntos de intersección	$(2,6)$ $(-6,6)$	$(2,2.5)$ $(0,2.5)$	$(-1,0)$ $(-5,0)$	$(-3.5,1)$ $(-3.5,-5$	$(3,5)$ $(3,1)$	$(-3.5,5)$ $(3.5.3)$
Magnitud del lado recto	8	2	4	6	4	2

Continua _Ecuación general y esbozo de la representación gráfica.

a) Ecuación general y gráfica,	d) Ecuación general y gráfica.
$x^2-4x-8y+36=0$	$y^2+4y+6x+16=0$



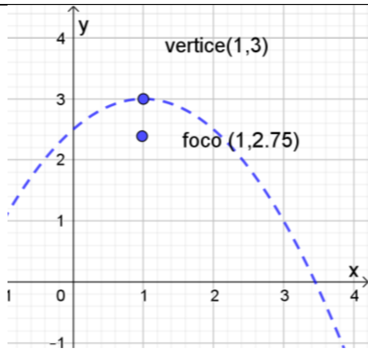


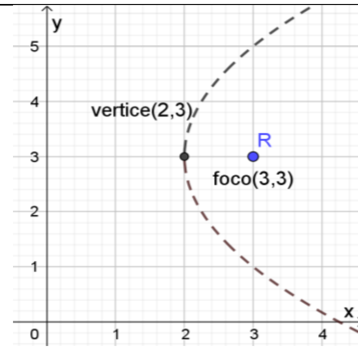
b) Ecuación general y gráfica.

$$x^2 - 2x + 2y - 5 = 0$$

e) Ecuación general y gráfica

$$y^2 - 6y - 4x + 17 = 0$$



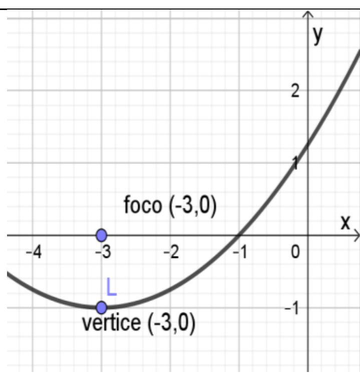


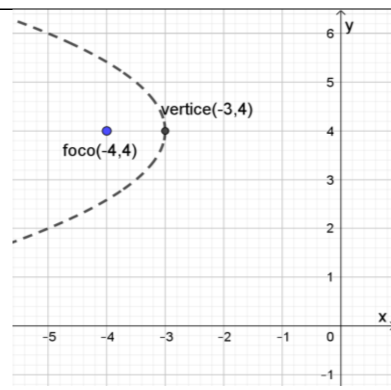
c) Ecuación general y gráfica.

$$x^2 + 6x - 4y + 5 = 0$$

f.) Ecuación general y gráfica.

$$y^2 - 8y + 2x + 22 = 0$$





Ejercicio 6 transformar la ecuación general a su representación ordinaria especificar el valor de sus elementos.

a) $\mathbf{x^2 + 8x + 6y + 22 = 0}$

d) $\mathbf{y^2 + 2y + 20x - 39 = 0}$

b) $\mathbf{y^2 + 4y + 6x - 5 = 0}$

c) $\mathbf{x^2 + 4x - 2y + 8 = 0}$

e) $\mathbf{x^2 - 4y + 8 = 0}$

f) $\mathbf{y^2 + 4y + 6x - 5 = 0}$

N°	Forma 0rdinaria de la parábola	vértice	Valor	foco	Directri
a	$(x+4)^2 = -6(y+1)$	$(-4,-1)$	$p = \frac{3}{2}$	$f(-4,-0.5)$	$y = 1.5$
b	$(y+2)^2 = -6(x-1.5)$	$(1.5,-2)$	$p = \frac{3}{2}$	$f(0,-2)$	$x = 3$
c	$(x+2)^2 = 2(y-2)$	$(-2,\ 2)$	$p = \frac{1}{2}$	$f(-2,2.5)$	$y = 1.5$
d	$(y+1)^2 = -20(x-2)$	$(2,-1)$	$p = 5$	$f(-3,-1)$	$x = 7$
e	$x^2 = 4(y-2)$	$(0,2)$	$p = 1$	$f(0,3)$,	$y = 1$
f	$(x+4)^2 = -6(y-1)$	$(0,2)$	$p = 1$	$f(0,3)$,	$y = 1$

Ejercicio 7 Sistema de ecuaciones formado por una recta y una parábola y entre dos parábolas

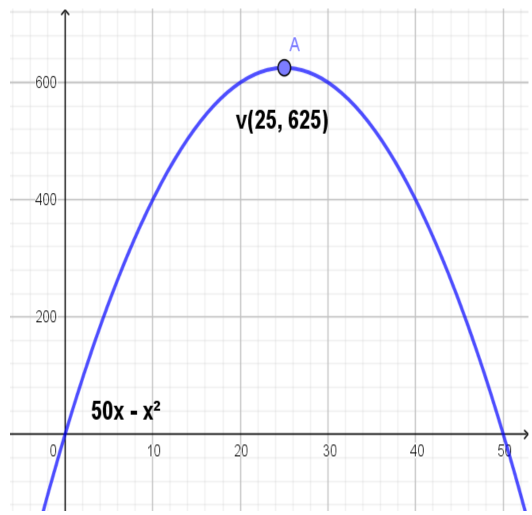
La solución son los puntos de la intersección.

una recta con una parábola	entre dos parábolas
a) $P_1\,(\mathbf{1.4})$; $\mathbf{P_2}\,(\mathbf{13,10})$	d) $P_1\,(\mathbf{2.4})$; $\mathbf{P_2}\,(\mathbf{6,-1})$
b) $P_1\,(\mathbf{21.0})$; $\mathbf{P_2}(\mathbf{28,7})$	e) $P_1\,(\mathbf{-1.7, 2.37})$; $\mathbf{P_2}(\mathbf{3.56, 3.5})$
c) $P_1\,(\mathbf{-5.-2})$; $\mathbf{P_2}\,(\mathbf{1,-5})$	f) $P_1(\mathbf{2.17.-2.99})$; $\mathbf{P_2}(\mathbf{4.82,-2})$

Ejercicio 8. Los siguientes planteamientos son ejemplos de las posibles aplicaciones lo cual no es reflejo de la totalidad de estos en diferentes aspectos en la vida real.

Solución

1.- Calcular las dimensiones de una figura regular para que su área sea máxima, teniendo en cuenta que su perímetro es de 100 cm.



La figura regular $A = xy$ $\quad p = 2\mathrm{x} + 2\mathrm{y}$

$100 = 2\mathrm{x} + 2\mathrm{y}$

despejando $y = \frac{100-2\mathrm{x}}{2}$

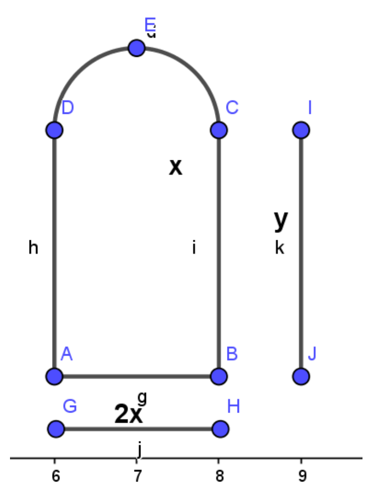
$y = 50 - x$ sustituyendo en

$A = x(50 - x) \qquad A = 50x - x^2$

graficando $vertice(25, 625)$ lado del cuadrado =25 el área máxima 625 cm.

2.- Una ventana es diseñada para permitir el mayor paso de luz, la cual tiene la forma de un rectángulo rematado por un semicírculo. La única restricción es que su perímetro total es de 28 m. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones?

Solución



$$\text{valor de } \mathrm{x} = \frac{28}{2\boldsymbol{\pi} + \mathbf{1}}$$

$$\text{semicirculo s} = 2\boldsymbol{\pi} + \mathbf{1}$$

$$\textbf{perimetro menos } \mathbf{28 - x - s}$$

Donde: $2\mathrm{x} = 4; \quad \mathrm{s} = 7;$

$$28 - 2\mathrm{x} - \mathrm{s} = 28 - 11 = 17$$

$$2\mathrm{y} = 17 \qquad \mathrm{y} = 8.5$$

3.- Punto de equilibrio del mercado. Un fabricante suministra (oferta). $f(x) = 3x^2 - 4x$ de un producto al mercado, el cual los consumidores (demanda) $f(x) = -x^2 + 24$, las cantidades están dadas en miles.

Determine el valor de x para que el mercado este en equilibrio (oferta = demanda), donde f(x) es el precio, x es el número de unidades.

Solución

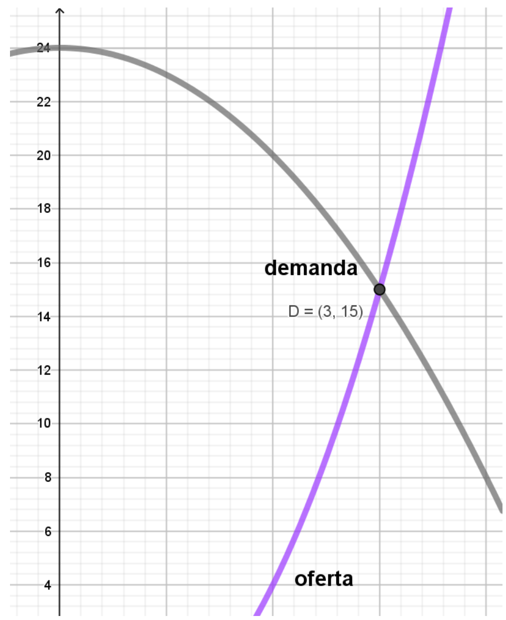
$3x^2 - 4x = \ -x^2 + 24$

$4x^2 - 4x - 24 = \ 0 \qquad x^2 - x - 6 = 0$ factorizando $(\mathrm{x} - 3)(\mathrm{x} + 2)$

utilizando la raíz positiva x=3 sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones dadas

$3x^2 - 4x = \ 3(3)^2 - 4(3) = 27 - 12 = 15$

el punto de equilibrio es (3,15) se ofertan 3000 productos a un precio de 15000.



Solución a la Propuesta de evaluación

1.- a) En ningún caso la parábola cruza a la directriz.

b) Si la directriz es perpendicular a la recta horizontal.

c) Si por la definición y por construcción.

d) Falso.

2.- La magnitud del lado recto es igual a (4p).

3.- Únicamente los incisos b" y d".

4.- b) $v(-2,-4), \ \ p = \frac{1}{4}, \quad Directriz\ (0,-4.25) \ \ y = -4.25.$

5.- a) $y^2 + 4y + 6x + 16$

6.- d) $x^2 + 6x - 8y + 17$

7.- c) $v(4,1),\ \ p = -\frac{1}{4},\ \ \ Directriz\ (0, 1.25)\ \ y = 1.25.$

8.- a) $p1(3.7, 0.5),\ \ p2(7.3, 7.6)$ parábola y recta.

9.- d) $\mathrm{x} = 500\ \text{articulos, con un valor de}\ \$\ 34{,}400$

10.- b) $\mathrm{v}(25, 625),\ \ \text{área maxima}\ 625$

Unidad 5 La Circunferencia y Elipse

La circunferencia

Presentación

El alumno al terminar esta unidad podrá ser

1) Capaz de obtener la ecuación cartesiana y ecuación general de la circunferencia con centro en el origen y fuera de este.
2) Trazar la gráfica de la circunferencia, identificando sus elementos radio (r) y coordenadas del centro en el origen y fuera de este.
3) Determinar los elementos de la circunferencia, transformando la ecuación general a su forma ordinaria.
4) Resolver problemas de corte geométrico, donde la circunferencia se presenta.

Conceptos Claves.

En esta sección aprenderás el estudio de la circunferencia como lugar geométrico, además ten presente que la circunferencia es un caso particular de la elipse.

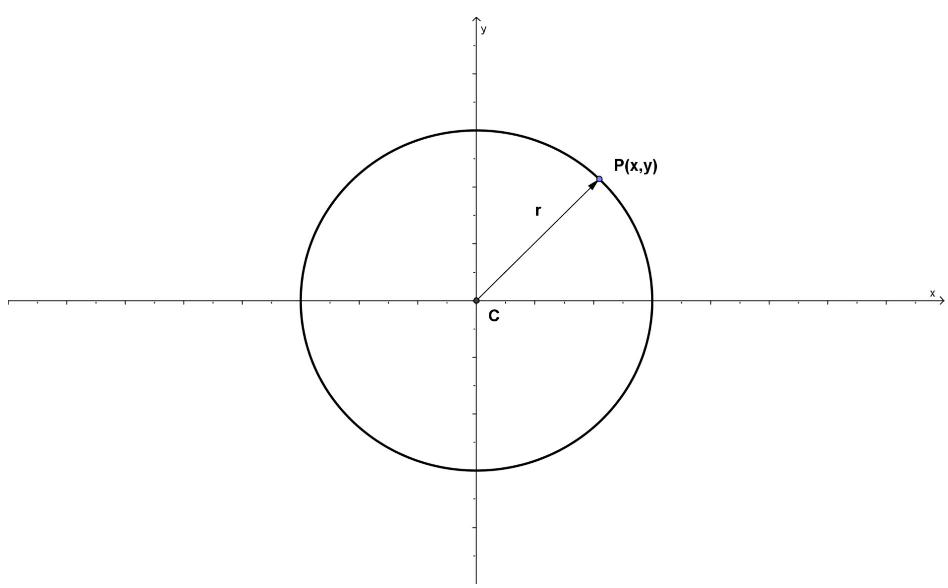
Definición: El conjunto de puntos en el plano que se encuentran a una distancia constante (el radio) a un punto fijo llamado centro.

A partir de esta definición deduzcamos la ecuación general de la circunferencia.

Dado el centro con coordenadas en el origen $(C\,(0,0))$ y radio r tenemos:

$$C\ P = r$$

Donde $C\,(0,0), P(x, y)$



Aplicando la fórmula de distancia entre dos puntos que es:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = r$$

Sustituyendo los valores obtenemos

$$\sqrt{(x - (0))^2 + (y - (0))^2} = r$$

Haciendo operaciones

$$\sqrt{(x)^2 + (y)^2} = r$$

Elevando al cuadrado ambos miembros tenemos

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = (r)^2$$

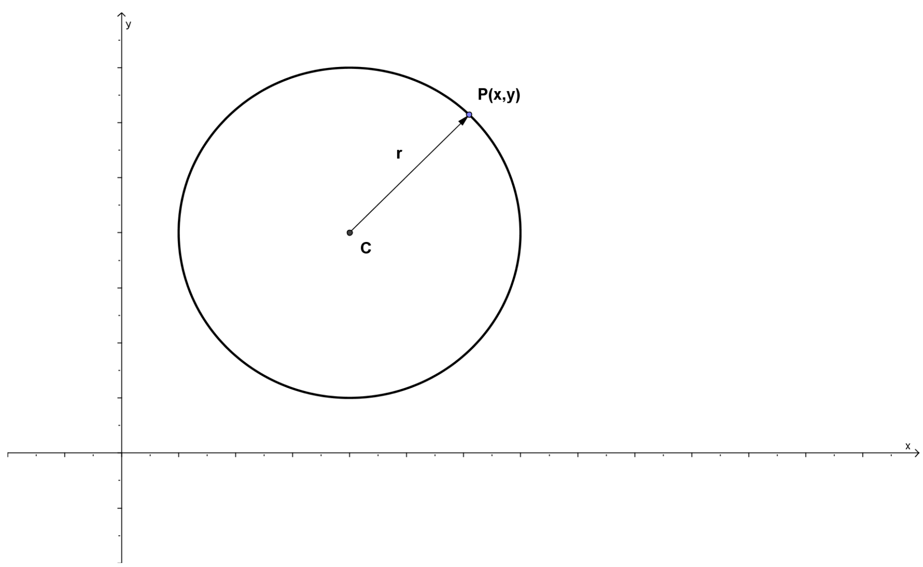
$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ ecuación cartesiana}$$

Esta ecuación también la llaman como ecuación centro radio de la circunferencia.

Si ahora ponemos el centro fuera del origen, sus coordenadas serán $C(h,k)$, donde h es el desfasamiento con relación al eje x y la k es el desplazamiento con el y

Obtengamos la ecuación cartesiana o canónica de una circunferencia con centro $C(h,k)$ y radio r, por medio de su definición.

Tenemos centro $C(h,k)$, el punto $P(x,y)$ y radio r.



$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

Elevando al cuadrado ambos términos

$$\left(\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}\right)^2=(r)^2$$
$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \text{ ecuación cartesiana}$$

Para poder obtener la ecuación general de la circunferencia desarrollamos los binomios.

$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2=r^2$$

Ordenando con relación a x y y tenemos

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$$

Llamamos $D=2h,\ E=2k$ y $F=h^2+k^2-r^2$ para llegar a la ecuación general que representa a la circunferencia

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \text{ ecuación general}$$

Observa que los coeficientes de los términos cuadráticos son 1, para poder obtener D, E y F .

Es importante tener presente que los coeficientes de los términos cuadráticos deben ser iguales para representar una **circunferencia** quiere decir que $A=B$ en la ecuación general de las cónicas.

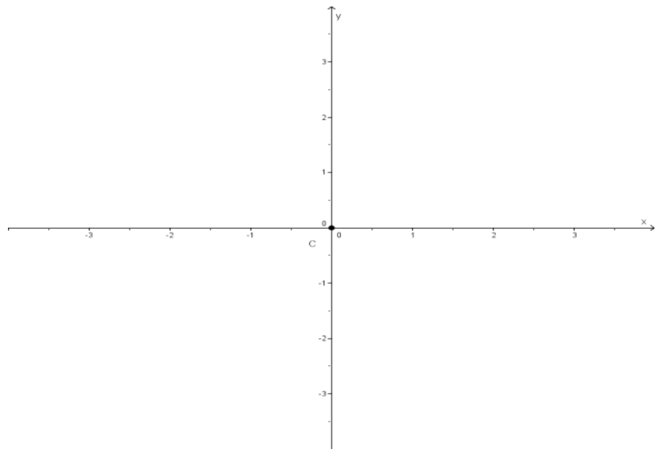
Circunferencia con centro en el origen y fuera de este

Ejercicios 1.

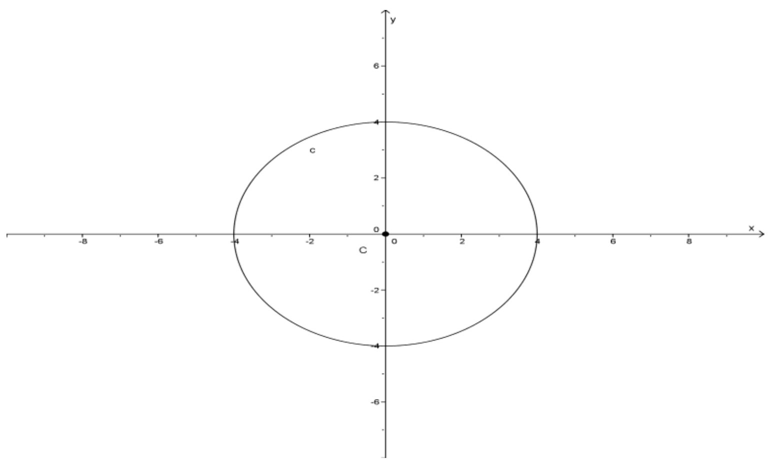
En esta sección aprenderás el cómo obtener la ecuación general de la circunferencia dado su centro y radio.

Obtener la ecuación general de la circunferencia que tiene como centro $C\ (0,0)$ y radio $r=4$, así como su gráfica.

Solución.
Primero tienes que trazar el plano cartesiano y localizar el centro.



Abres tu compás 4 unidades y pones el compás en el centro, trazando así la circunferencia.



Ahora para obtener la ecuación general sustituiremos el radio en la ecuación.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Por tener el centro en el origen, así sustituyendo tenemos

$$x^2 + y^2 = (4)^2$$
$$x^2 + y^2 = 16 \text{ ecuación cartesiana}$$

Para poder obtener la ecuación general, es necesario igualar a cero la ecuación cartesiana o canónica.

$$x^2 + y^2 - 16 = 0 \text{ ecuación general}$$

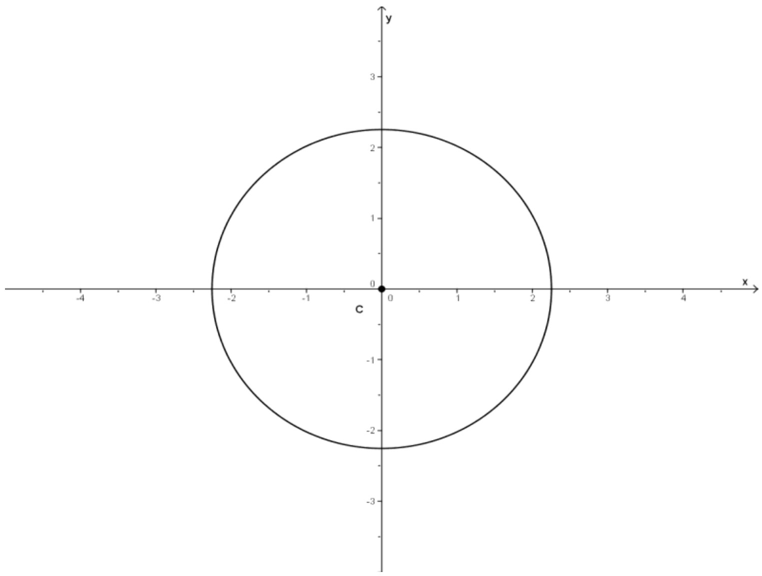
Ejemplo 2

Determina la ecuación general de la circunferencia que tiene centro en el origen y radio $r = \frac{9}{4}$ **y trazar su gráfica.**

Solución.

Recuerda que primero trazamos la circunferencia, puesto que tenemos los elementos centro y radio.

Abrimos el compás $\frac{9}{4} = 2.2$ unidades y trazamos.



Sustituimos los valores en la ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Obtenemos

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 = \frac{81}{16} \text{ ecuación canónica}$$

Para obtener la ecuación general se necesita que este igual a cero y con números enteros.

$$x^2 + y^2 - \frac{81}{16} = 0$$

Multiplicando por 16 toda la ecuación.

$$16\left(x^2 + y^2 - \frac{81}{16}\right) = 0\,(16)$$

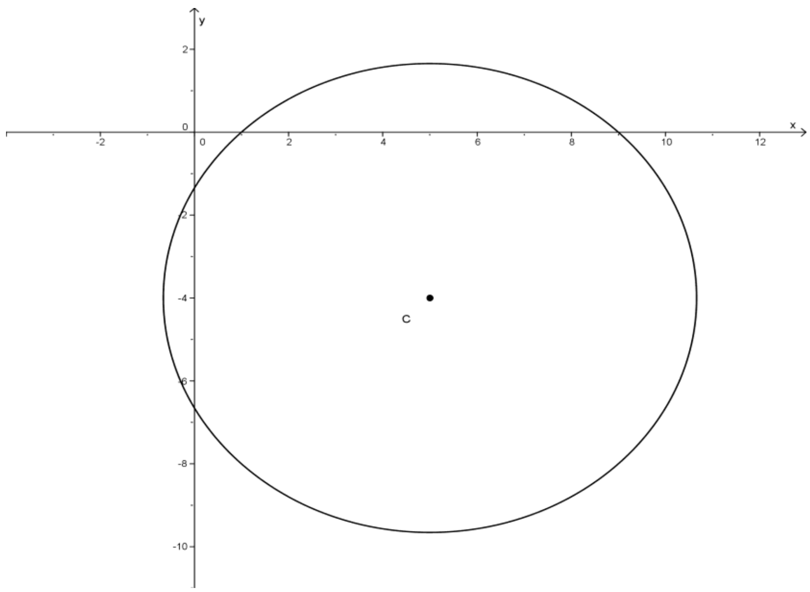
$$16x^2 + 16y^2 - 81 = 0 \text{ ecuación general}$$

Ejemplo 3.

Encuentra la ecuación general de la circunferencia que tiene como centro $C\,(5,-4)$ y radio $r=6$ unidades.

Solución.

Trazamos el plano x y y localizamos el centro, abriendo el compás 6 unidades y lo apoyamos en el centro para trazar la circunferencia.



Sustituyendo los valores del centro $C\,(5,-4)$ y radio $r=6$ en la ecuación

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Queda la ecuación

$$(x-5)^2+(y+4)^2=(6)^2$$

Elevando al cuadrado el radio, se obtiene la ecuación canónica.

$$(x-5)^2+(y+4)^2=36$$

Para obtener la ecuación general, desarrollamos los binomios al cuadrado y la ordenamos, igualando a cero.

$$x^2-10x+25+y^2+8y+16-36=0$$

Ordenando queda.

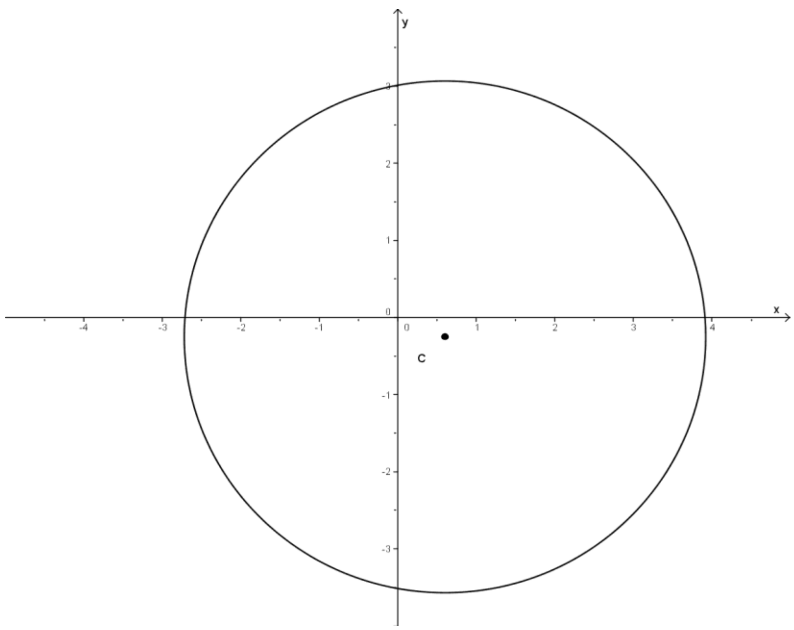
$$x^2+y^2-10x+8y+5=0 \text{ ecuación general}$$

Ejemplo 4.

Determina la ecuación general de la circunferencia que tiene como centro $C\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{4}\right)$ **y radio** $r=\sqrt{11}$

Solución.

De la misma manera que en los ejercicios anteriores trazamos la circunferencia con $C\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{4}\right)\approx(.6,-.25)$ y $r=\sqrt{11}\approx 3.3$



Ahora sustituyendo los valores del centro y radio en la ecuación canónica tenemos.

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\left(\sqrt{11}\right)^2$$

Elevando el cuadrado el radio tenemos.

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=11 \text{ ecuación canónica}$$

Desarrollamos los binomios al cuadrado, para empezar a obtener la ecuación general.

$$x^2+2(x)\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+y^2+2(y)\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2-11=0$$

Simplificamos tenemos.

$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} + y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} - 11 = 0$$

Ordenando los términos y simplificando.

$$x^2 + y^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{1511}{144} = 0$$

Multiplicando por el mínimo común múltiplo para convertir la ecuación a números enteros.

$$144x^2 + 144y^2 - 192x + 72y - 1511 = 0 \text{ ecuación general}$$

En los ejercicios a continuación aprenderás a obtener el centro y el radio a partir de la ecuación general de la circunferencia.

Ejemplo 5.

De la ecuación $x^2 + y^2 - 36 = 0$, obtener el centro, radio y su gráfica.

Solución.

Por construcción de la ecuación $x^2 + y^2 - 36 = 0$, el centro está en el origen, además no hay términos de primer grado.

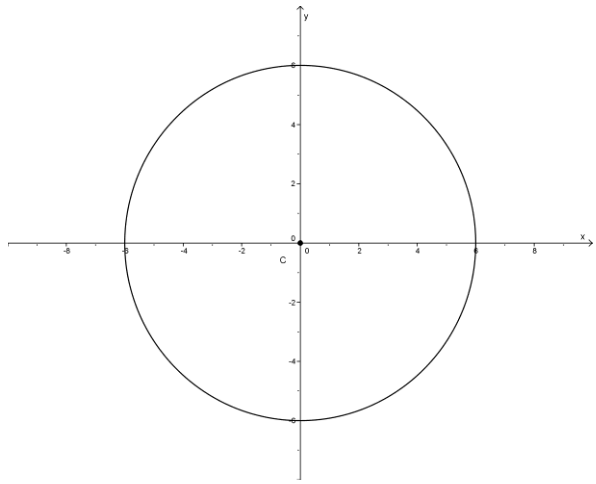
Pasamos la ecuación a forma estándar o canónica para obtener el radio.

$$x^2 + y^2 - 36 = 0$$
$$x^2 + y^2 = 36$$

Observa que

$$r^2 = 36$$
$$r = \sqrt{36}$$
$$r = 6$$

Teniendo el centro $C(0,0)$ y radio $r = 6$ podemos graficar la circunferencia.



Ejercicio 1.

Determina el valor de centro y el radio de la circunferencia que tiene como ecuación general $4x^2+4y^2-81=0$**.**

Solución.

Para obtener las coordenadas del centro y la medida del radio es necesario dividir entre 4 a toda la ecuación.

$$x^2+y^2-\frac{81}{4}=0$$

Por construcción de la ecuación que no tiene términos de primer grado, entonces el centro está en el origen.

Para obtener el radio pasamos el término independiente al 2° miembro para llegar a su forma estándar.

$$x^2+y^2-\frac{81}{4}=0$$

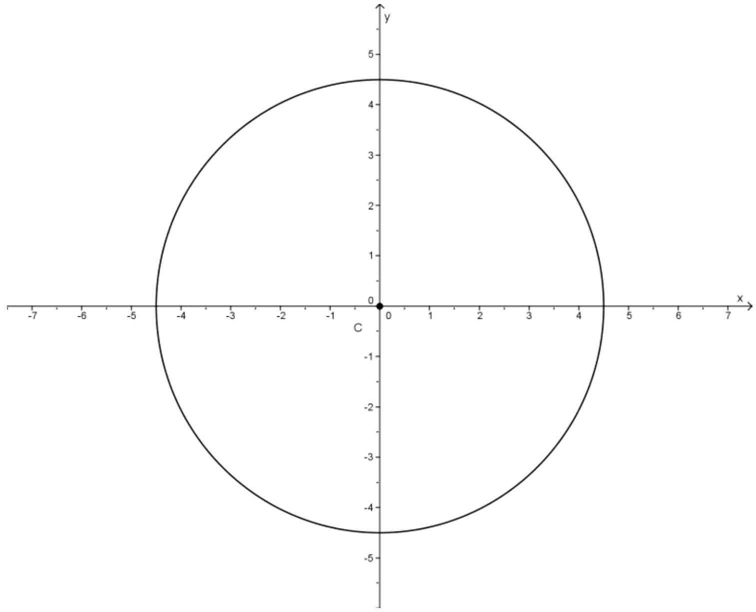
$$x^2+y^2=\frac{81}{4}$$

Entonces $r^2=\frac{81}{2}$ donde $r=\sqrt{\frac{81}{4}}$

$$r=\sqrt{\frac{81}{4}}$$

$$r=\frac{9}{2}$$

Graficamos con $C\ (0{,}0)$ y radio $r = \frac{9}{2} = 4.5$



Ejercicio 2.

Encuentra las coordenadas del centro y la medida del radio de la circunferencia que tiene como ecuación general.

$$x^2 + y^2 + 10x - 4y - 7 = 0$$

Solución.

Los coeficientes de los términos cuadráticos son iguales, eso quiere decir que es una circunferencia.

Aplicamos el método de completar un trinomio cuadrado perfecto para pasar la ecuación general a la forma estándar o canónica.

Agrupamos lo términos de la siguiente manera.

$$x^2 + 10x + y^2 - 4y = 7$$

Tomamos el coeficiente del término lineal de $"x"$ y $"y"$ para obtener el término que forma el trinomio cuadrado perfecto (TPC).

$$\left(\frac{10}{2}\right)^2 = (5)^2 = 25$$

$$\left(-\frac{4}{2}\right)^2 = (-2)^2 = 4$$

Agregamos en ambos miembros.

$$x^2+10x+25+y^2-4y+4=7+25+4$$

Factorizando.

$$(x+5)^2+(y-2)^2=36 \text{ ecuación cartesiana.}$$

El centro tiene coordenadas $C\,(-5,2)$ y el radio.

$$r^2=36$$
$$r=\sqrt{36}$$
$$r=6.\text{unidades}$$

Ejercicio 3

Obtener las coordenadas del centro y la medida del radio, de la circunferencia que tiene ecuación general.

$$x^2+y^2+2x-y-5=0$$

Solución.

Observamos los coeficientes de los términos cuadráticos que son iguales, eso implica que es una circunferencia.

Agrupemos los términos para aplicar el método de completar cuadrados.

$$x^2+2x+y^2-y=5$$

Tomamos el coeficiente del término lineal, para tomar el trinomio cuadrado perfecto.

$$\left(\frac{2}{2}\right)^2=(1)^2=1$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

Agregamos en ambos miembros.

$$x^2+2x+1+y^2-y+\frac{1}{4}=5+1+\frac{1}{4}$$

Factorizando

$$(x+1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

Las coordenadas del centro son $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ y el radio

$$r^2 = \frac{25}{4}$$

$$r = \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$r = \frac{5}{2}$$

Ejercicio 4.

Determina las coordenadas del centro y el valor del radio r **de la circunferencia que tiene como ecuación general.**

$$36x^2 + 36y^2 - 36x + 216y + 137 = 0$$

Solución.

Si queremos obtener la ecuación estándar de la circunferencia tenemos que dividir toda la ecuación entre 36, para poder aplicar el método de completar un trinomio cuadrado perfecto.

$$\frac{36x^2 + 36y^2 - 36x + 216y + 137}{36} = \frac{0}{36}$$

$$x^2 + y^2 - -x + 6y + \frac{137}{36} = 0$$

Agrupando los términos para aplicar el método de completar cuadrados.

$$x^2 - x + y^2 + 6y = -\frac{137}{36}$$

Agrego el término que forma el trinomio cuadrado perfecto.

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \qquad \left(\frac{6}{2}\right)^2 = (3)^2 = 9$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + 6y + 9 = -\frac{137}{36} + \frac{1}{4} + 9$$

Factorizando.

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 3)^2 = \frac{49}{9}$$

El centro de la circunferencia es $\left(\frac{1}{2}, -3\right)$ y el radio.

$$r^2 = \frac{49}{9}$$

$$r = \sqrt{\frac{49}{9}}$$

$$r = \frac{7}{3}$$

Ejercicio 5.

Encuentra las coordenadas del centro y el valor del radio de la circunferencia que tiene como ecuación general.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$$

Solución.

Agrupamos los términos para aplicar el método de completar cuadrados.

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y = -5$$

Tomamos el coeficiente de los términos lineales, para formar el TCP.

$$\left(-\frac{2}{2}\right)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$\left(\frac{4}{2}\right)^2 = (2)^2 = 4$$

Agregamos en ambos miembros

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = -5 + 1 + 4$$

Factorizando.

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 0$$

Las coordenadas del centro son $(1,-2)$ pero el radio es 0.

Esto quiere decir que es un punto y no una circunferencia real.

En los siguientes ejercicios aprenderás a obtener el indicador el cual sirve para identificar una circunferencia real o circunferencia imaginaria o simplemente un punto, a partir de su ecuación general.

Dada la ecuación general de la circunferencia.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

El indicador es.

$$\boldsymbol{T = D^2 + E^2 - 4F}$$

Si $\boldsymbol{T > 0}$ es una **circunferencia real**, lo que significa es que tiene centro con coordenadas $C\left(h,k\right)$ y radio $r \in lR$, y se puede graficar en el plano cartesiano.

Sí $\boldsymbol{T < 0}$, es una **circunferencia imaginaria**, quiere decir que tenemos coordenadas del centro $C\left(h,k\right)$, pero el radio es un número imaginario $\boldsymbol{r \in C}$, y **no** se puede graficar.

Si $\boldsymbol{I = 0}$ esto significa que la circunferencia se deduce **a un punto**, tiene centro con coordenadas $C\left(h,k\right)$, pero su radio $\boldsymbol{r = o}$, en el plano cartesiano solo se gráfica el centro que es un punto.

Ejercicio 6.

De la ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 4 = 0$ indica el tipo de circunferencia de la que se trata, circunferencia real o imaginaria o un punto.

Solución.

Los valores D, E y F son $D = -4,\ E = 0$ y $F = 4$ sustituimos en la fórmula del indicador y obtenemos.

$$\begin{aligned} I &= D^2 + E^2 - 4F \\ &= (-4)^2 + (0)^2 - 4(4) \\ &= 16 - 16 \\ &= 0 \text{ es un punto} \end{aligned}$$

Ejercicio 7.

Dada la ecuación

$$x^2 + y^2 - 3x + 2y + 5 = 0$$

Determina el tipo de circunferencia de la que se trata.

Solución.

Los valores de los parámetros son $D = -3,\ E = 2$ y $F = 5$ sustituimos los valores en el indicador y da.

$$
\begin{aligned}
I &= D^2 + E^2 - 4F \\
&= (-3)^2 + (2)^2 - 4(5) \\
&= 9 + 4 - 20 \\
&= 7 < 0 \text{ es una circunferencia imaginaria}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 8.

La circunferencia con ecuación general.

$$2x^2 + 2y^2 - 6x + 2y + 2 = 0$$

Determina el tipo de circunferencia de la que se trata.

Solución.

Lo que tiene que hacer es, dividir entre 2 a toda la ecuación para poder obtener los valores de D, E y F.

$$\frac{2x^2 + 2y^2 - 6x + 2y + 2}{2} = 0$$

Obtenemos.

$$x^2 + y^2 - 3x + y + 1 = 0$$

Los valores son $D = -3,\ E = 1$ y $F = 1$ sustituimos en la fórmula del indicador.

$$
\begin{aligned}
I &= D^2 + E^2 - 4F \\
&= (-3)^2 + (1)^2 - 4(1) \\
&= 9 + 1 - 4 \\
&= 7 < 0 \text{ es una circunferencia real}
\end{aligned}
$$

Para Recordar.

- Si $I = D^2 + E^2 - 4F > 0$ es una circunferencia real, que tiene centro $C(h,k)$ y $r \in lR$ y **si se puede graficar.**
- Si $I = D^2 + E^2 - 4F < 0$ es una circunferencia imaginaria que tiene centro $C(h,k)$ pero su radio $r \in C$ y **no se puede graficar.**
- Si $I = D^2 + E^2 - 4F > 0$ es un punto que su centro es $C(h,k)$ y $r = 0$.

Ejercicios

I) Encontrar la ecuación general de la circunferencia y su grafica que tiene.

1) centro $C\left(0{,}0\right)$ y $r=7$
2) centro $C\left(0{,}0\right)$ y $r=2$
3) centro $C\left(5,-2\right)$ y $r=8$
4) centro $C\left(-1,-3\right)$ y $r=6$
5) centro $C\left(0,-6\right)$ y $r=4$
6) centro $C\left(5{,}0\right)$ y $r=\frac{9}{2}$
7) centro $C\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{2}\right)$ y $r=\sqrt{3}$
8) centro $C\left(-\frac{3}{4}\right),4$ y $r=\frac{11}{3}$
9) centro $C\left(0,-\frac{7}{3}\right)$ y $r=6$
10) centro $C\left(\frac{9}{5},0\right)$ y $r=\sqrt{7}$

II) En las siguientes ecuaciones generales de circunferencia, determina su centro y radio, por medio de su ecuación estándar.

1) $x^2+y^2-4x+2y-11=0$
2) $x^2+y^2+6x-4y+6=0$
3) $x^2+y^2-8x-9=0$
4) $x^2+y^2+10x-4y-7=0$
5) $x^2+y^2-12y=0$
6) $16x^2+16y^2-16x+8y-139=0$
7) $x^2+y^2-y-6=0$
8) $9x^2+9y^2+36x-48y-128=0$
9) $3x^2+3y^2+18y+24=0$

III) Indica el tipo de circunferencia de la que se trata si es real, imaginario o un punto, por medio el discriminante.

1) $x^2+y^2-2x+3y+9=0$
2) $x^2+y^2-2x+2y+2=0$
3) $x^2+y^2+3x+y=0$
4) $x^2+y^2+4y+4=0$

5) $x^2+y^2-2x+5=0$
6) $x^2+y^2+3x-4y-5=0$
7) $x^2+y^2+9=0$
8) $3x^2+3y^2-12x+9y-3=0$
9) $2x^2+2y^2-8x+8=0$
10) $5x^2+5y^2+10y-5=0$

Problemas de Aplicación

Ecuación cartesiana de la circunferencia con centro fuera al origen.

Ejercicio 1.

El círculo es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro.

En la tendencia moderna el concepto de círculo se refiere ya sea al borde o al borde junto con el interior de la figura.

Los puntos de intersección de dos círculos determinan al **eje radical**.

1.- Obtener la ecuación y la magnitud del eje radical, dadas las dos ecuaciones generales de las circunferencias.

$x^2+y^2+2x-4y-8=0$; $x^2+y^2-2x-6y-10=0.$

<u>Solución.</u>

Igualando ambas ecuaciones y simplificando $2x-4y-8+2x+6y+10=0.$ Reduciendo términos semejantes se tiene. $4x+2y+2=0$, despejando la variable y”, obtenemos la **ecuación del eje radical** $\boldsymbol{y=-2x-1}$

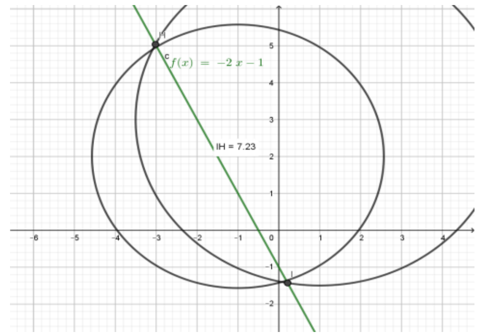
Por otra parte, es conveniente elevar al cuadrado la variable despejada $y^2=4x^2+4x+1.$ ____Para poder sustituir la ecuación lineal y la ecuación cuadrática, en una de las ecuaciones originales dadas para así obtener los puntos de intersección y la longitud del eje radical.

$$x^2+(4x^2+4x+1)+2x-4(-2x-1)-8=0$$

Simplificando. $x^2+4x^2+4x+1+2x+8x+4-8=0$

$$5x^2+14x-3=0$$

Al aplicar la solución general de las cuadráticas. Encontramos dos valores de. $xi = 0.4$ $xii = -3$ sustituyendo estos valores en la ecuación del eje radical $\boldsymbol{y = -2x - 1}$ obtenemos dos valores de: $yi = -1.8$ $yii = 5$ por lo que los puntos de intersección son $p1(0.4, -1.8)$ $p2\ (-3, 5)$ calculando la distancia entre ambos puntos obtenemos la longitud del eje radical que es $\mathbf{d = 7.5}$



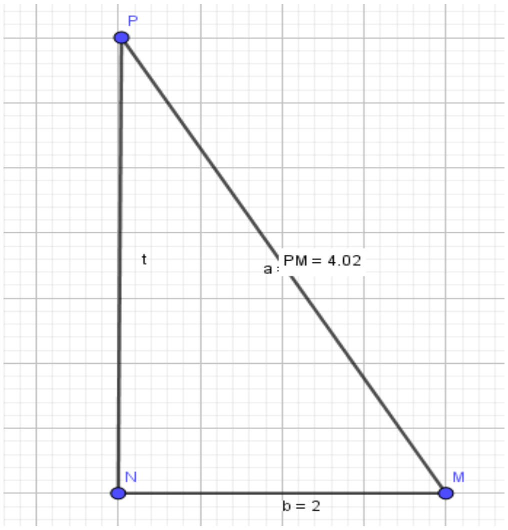
Los objetos concéntricos comparten el mismo centro, eje u origen. Los círculos, tubos, ejes cilíndricos, discos y esferas pueden ser concéntricos entre sí.

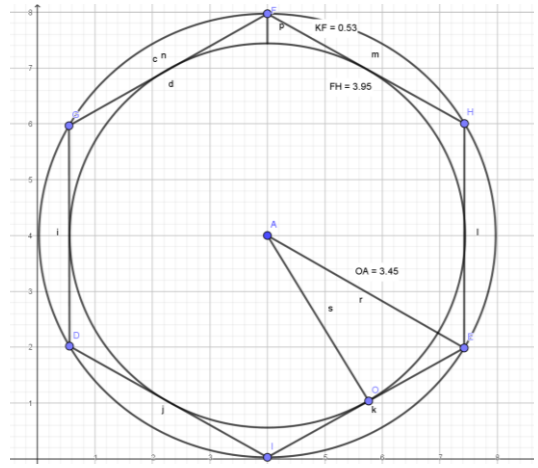
2.- A un hexágono regular de 4 cm de lado se le inscribe una circunferencia y se le circunscribe otra. Determina el ancho y el área de la corona circular así formada.

Solución.

Un hexágono regular está formado por 6 triángulos equiláteros por lo que se puede analizar un triángulo rectángulo para conocer la magnitud del segundo radio.

Si la hipotenusa vale 4 y el cateto 2.

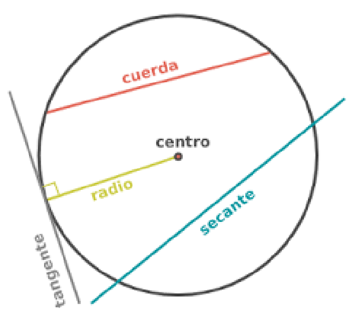




la altura es igual $h = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$ = 3.4 por lo que el ancho de la corona es de 0.6 cm. el área $\pi(4^2 - 2^2) = 4\pi = 12.56\, cm^2$

Dados una circunferencia y una recta puede suceder que:

- La recta corte a la circunferencia en dos puntos (diámetro).
- La recta corte a la circunferencia en dos puntos (secante).
- La recta corta a la circunferencia en un solo punto (Tangente).



La recta tangente a una circunferencia en un punto, también llamada recta exterior a la circunferencia, la cual es una recta perpendicular a uno de sus radios.

3.- Obtener la ecuación de la recta tangente a la circunferencia.

$x^2 + y^2 + 8x + 4y - 80 = 0$, en el punto $p(4, -8)$

<u>Solución</u>

Como primer paso hay que determinar el valor de la pendiente entre el centro de la circunferencia y el punto dado.

Al determinar la ecuación ordinaria de la circunferencia $(x+4)^2+(y+2)^2=10^2$ se obtienen las coordenadas del centro (- 4,- 2), el valor de la pendiente del centro al punto es

$$\mathrm{m} = \frac{\mathrm{yc-yp}}{\mathrm{xc-xp}} = \frac{-2+8}{-4-4} = \frac{6}{-8},$$

por definición se requiere la pendiente perpendicular al radio por lo que se debe encontrar la pendiente inversa.

$$m2 = -\frac{1}{m} = \frac{-1}{\left(\frac{6}{-8}\right)} = \frac{8}{6}$$

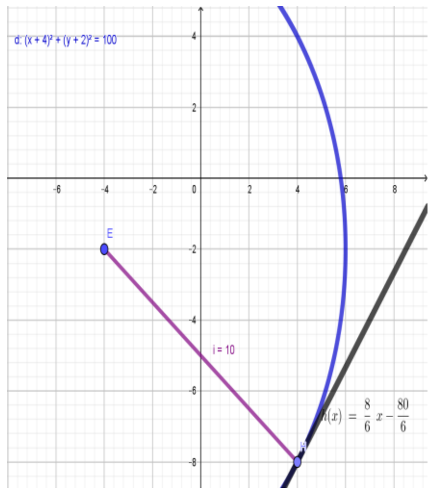
Utilizando la ecuación de la recta punto pendiente.

$(\mathrm{y} - \mathrm{y\,p}) = \mathrm{m}\,(\mathrm{x} - \mathrm{x\,p})$ sustituyendo los datos $(\mathrm{y}+8) = \frac{8}{6}\ (\mathrm{x} - 4)$

$$(\mathrm{y}+8) = \frac{8}{6}\ (\mathrm{x} - 4)$$

$$(\mathrm{y}+8) = \frac{8}{6}\,\mathrm{x} - \frac{32}{6}$$

$\mathrm{y} = \frac{8}{6}\,\mathrm{x} - \frac{32}{6} - 8$ la ecuación de la recta tangente es $\mathrm{y} = \frac{8}{6}\,\mathrm{x} - \frac{80}{6}$



Ejercicios planteados

a) Determina las coordenadas de los puntos de intersección, si los hay dada la ecuación de la recta. $\mathrm{x}+\mathrm{y}-1=0$ y la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2-8x+7=0$

b) Calcular el área de la corona circular determinada por las circunferencias inscrita y circunscrita a un cuadrado de 8 m de diagonal.

c) Encontrar los puntos de intersección de los círculos cuyas ecuaciones son $x^2+\mathrm{y}^2+8x+6y+9=0$ y $x^2+\mathrm{y}^2-4x-2y-20=0$

<u>Soluciones</u>

a) Puntos de intersección de la recta y la circunferencia $p_1(1,0)$ y $p_2\,(4,-3)$
b) $A = \boldsymbol{\pi}(R^2-r^2)$ $A = \mathbf{25.13}\ cm^2$
c) Los puntos de intersección del eje radical son $p_1(-3,0.8)$ y $p_2\,(0,-3.5)$

Autoevaluación

1.- Determinar la ecuación general de la circunferencia, su diámetro es el segmento cuyos puntos extremos $A(1,-3) y\ B(-1,-3)$

2.- Identifica cual de las ecuaciones son circunferencia en caso afirmativo obtén su centro y radio. $x^2+y^2-2x-4y-6=0$

$$x^2+12x-18y=0$$

$$x^2+y^2-6x-10y+100=0$$

3.- Obtenga la ecuación ordinaria, centro y radio dada la ecuación general

$$x^2+y^2+6x-4y-3=0$$

4.- Obtener la ecuación de la circunferencia que tiene por centro $(5,2)$ y es tangente $3x+2y-6=0$

5.- ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia circunscrita al triangulo con vértices $A(2{,}4), B(2,-2) y\ C(6,-2)$

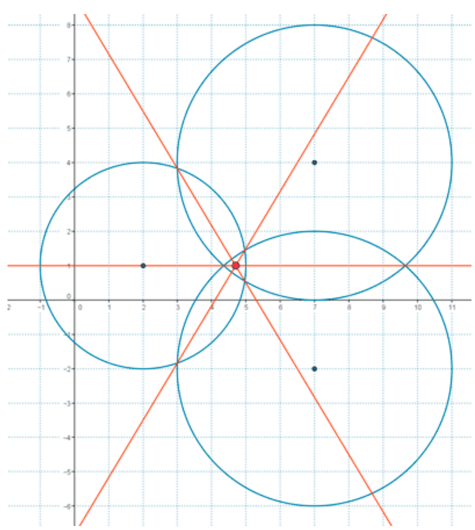
6.- Encontrar la longitud de la cuerda común a las circunferencias $x^2+y^2-5=0$

$$x^2+y^2-5x=0$$

7.- Determinar los puntos de intersección dado el siguiente sistema.

$$a)=\begin{cases} x^2+y^2-4x-6y-3=0 \\ x^2+y^2-18x-6y+81=0 \end{cases}$$

8.- Halla los ejes radicales y el centro radical de las circunferenci



<u>Soluciones</u>

1.- $x^2 + y^2 + 6y + 8 = 0$

2.- centro (1,2) y radio 3

3.- centro (3,- 2) y radio 4

4.- radio = distancia del centro a la recta tangente = 2.6

Por lo que la ecuación es $(x-5)^2 + (y-2)^2 = (2.6)^2$

$$x^2 + y^2 - 10x - 4y + 22.25 = 0$$

5.- La ecuación es $(x-4)^2 + (y-1)^2 = (5.4)^2$

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y - 13 = 0$$

6.- Ecuación y magnitud del eje radical. La ecuación es x =1 y los puntos de intersección $p_1(1,2)$ $p_2(1,-2)$ por lo que la magnitud es = 4.

7.- Los puntos de intersección de las dos circunferencias dadas $p_1(7.5, 5.5)$ $p_2(7.5, 0.5)$

8.- Ecuaciones de los ejes radicales

$$y = 1$$

$$y = \left(\frac{8}{5.6}\right)x + 9 = 0$$

$$y = \left(\frac{6}{4.2}\right)x - 7 = 0$$

El punto de intersección de los ejes radicales p (4.6,1).

BIBLIOGRAFÍA

1) De Oteyza E. et al. (2001*). Geometría Analítica y Trigonometría.* México. Pearson Prentice Hall, 1ª edición. Pp. 484-488.
2) De Oteyza E. et al. (2008). *Geometría Analítica y Trigonometría.* México. Pearson Prentice Hall. 2ª edición. Pp.391- 401.

La Elipse

Presentación.

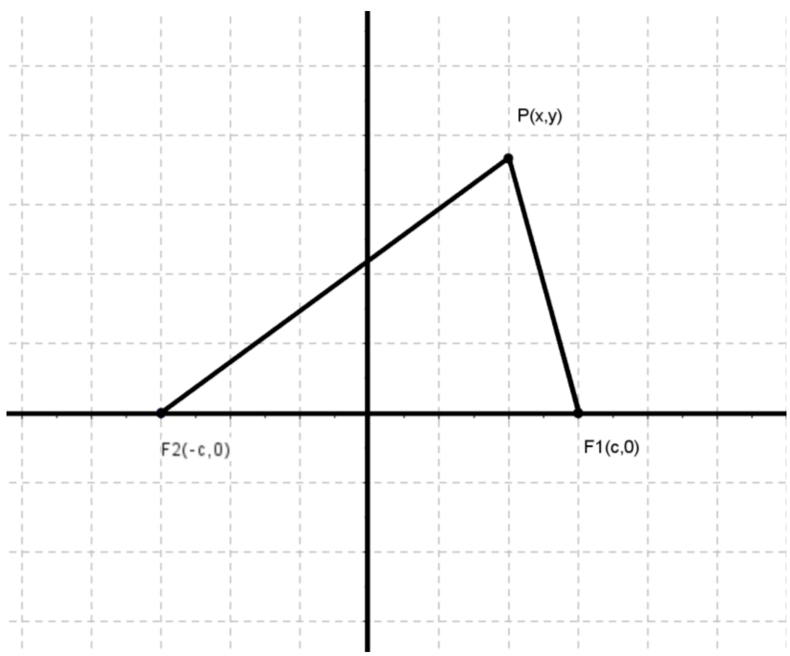
El alumno al terminar esta unidad podrá ser

5) Capaz de obtener la ecuación cartesiana y ecuación general de la elipse con centro en el origen y fuera de este.
6) Trazar la gráfica de la elipse, reconociendo sus parámetros a, b y c con centro en el origen y fuera de este.
7) Determinar los elementos de la elipse, transformando la ecuación general a su forma ordinaria.
8) Resolver problemas donde la elipse se presenta.

Conceptos Claves.

Definición. El conjunto de todos los puntos $P(x, y)$, tales que la suma de las distancias de $P(x, y)$ a dos puntos fijos F_1 y F_2 del plano, llamados focos, es constante.

Sea un punto $P(x, y)$ suponiendo que está sobre la elipse que tiene como focos $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$, gráficamente se tiene:



Los focos de la elipse son puntos y elementos que sirven de referencia para definir la cónica y construirla, pero no forman parte de ésta.

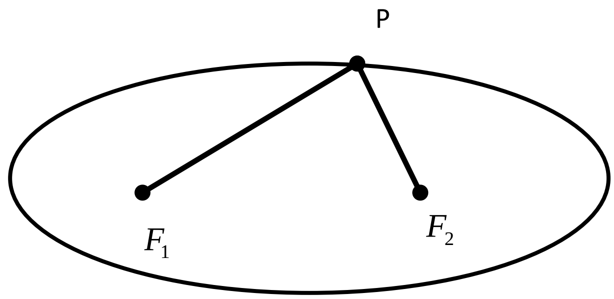
Observemos que para cualquier punto P sobre el segmento que une los focos:

$$F_1P + F_2P = F_2F_1$$

La suma de sus distancias a los focos F_1 y F_2 es una constante, es decir siempre da F_1F_2 pero no se formaría una elipse, porque recuerda que el hilo debe ser mayor a la distancia que existe entre los focos.

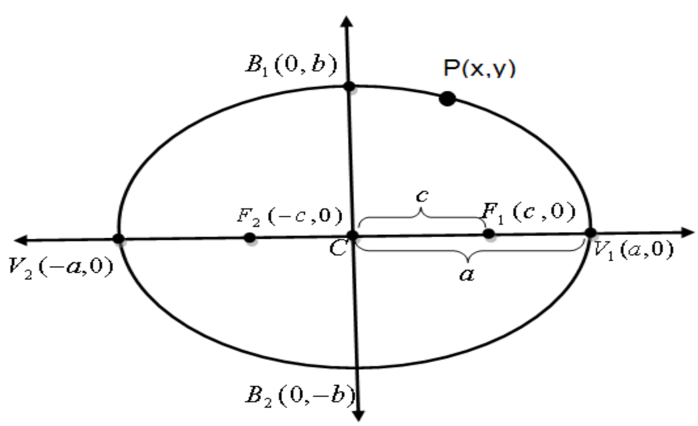
Con el análisis anterior es necesario cumplir las siguientes condiciones para formar gráficamente la elipse:

- Los focos y el segmento que los une no forman parte de una elipse.
- La suma de las distancias de los focos al punto P, es mayor que la distancia entre los focos.



Cumpliendo con los incisos anteriores $F_1P + F_2P =$constante

En la siguiente gráfica se muestran segmentos, puntos y rectas que se asocian con la elipse.



F_1 y F_2 son los focos y la distancia entre ellos es la distancia focal.

V_1 y V_2 son los vértices y como segmento es el **eje mayor o eje focal.**

C es **el centro** de la elipse.

B_1 y B_2 son los extremos del **eje menor** y como segmento es el **eje menor.**

Los vértices son los puntos donde el eje mayor corta a la elipse. El centro de la elipse es el punto medio del segmento que une los focos. **La recta normal** pasa por el centro y es perpendicular al eje mayor.

Una cuerda de la elipse que es la perpendicular al eje mayor y que pasa por uno de los focos F_1 o F_2, recibe el nombre **del lado recto o ancho focal.**

Elipse Horizontal y Vertical con Centro en el Origen

De forma algebraica obtengamos, a partir de la definición, la ecuación canónica o estándar de la elipse con centro en el origen y de forma horizontal. Sí $F_1(c,0), F_2(-c,0)$ y $a \in \Re$ con $a > 0$, entonces

$$PF_2 + PF_1 = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Realizando operaciones algebraicas, como el elevar al cuadrado, agrupación de términos semejantes, simplificación y factorización se obtiene

$$a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2$$
$$a^2\left(a^2 - c^2\right) = x^2\left(a^2 - c^2\right) + a^2y^2$$

Si observamos la figura anterior la longitud de F_1F_2 es $2c$ y la suma de las longitudes F_2P y F_1P del triángulo F_2PF_1 es $2a$. Por lo tanto, $2a > 2c$ entonces dividiendo entre dos.

$$a > c$$

Como $a > 0$ entonces, $a^2 > ac$ y $c > 0$, de donde

$$ac > c^2$$

Por transitividad tenemos que

$$a^2 > c^2$$
$$a^2 - c^2 > 0$$

Llamamos $b^2 = a^2 - c^2$

y sustituyendo en la ecuación anterior.

$$a^2b^2 = b^2x^2 + a^2y^2$$

Dividiendo entre $a^2b^2 \neq 0$,

$$\frac{a^2b^2}{a^2b^2} = \frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Que es la ecuación ordinaria o cartesiana de la elipse con respecto a ambos ejes coordenados. Cabe mencionar que la ecuación ordinaria y la ecuación cartesiana es la misma de la elipse.

Cuando $y = 0$ entonces $x = \pm a$ y si $x = 0$ entonces $y = \pm b$. Es por eso que la elipse corta al eje x en $V_2(-a, 0)$ y $V_1(a, 0)$ y al eje y en $B_2(0, -b)$ y $B_1(0, b)$. La distancia que hay de V_2 a V_1 es $2a$ y se llama, **diámetro mayor de la elipse.**

La distancia que hay de B_2 a B_1 es $2b$ y se llama **diámetro menor de la elipse.**

La cuerda que pasa por un foco y es perpendicular al eje mayor se llama **lado recto.** (Hernández C.2008, p 391)

Para calcular su longitud del lado recto sustituimos en la ecuación simétrica $x = c$ y usamos la relación $c^2 = a^2 - b^2$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{a^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^4}{a^2}$$

De donde $y = -\frac{b^2}{a}$ o $y = \frac{b^2}{a}$,

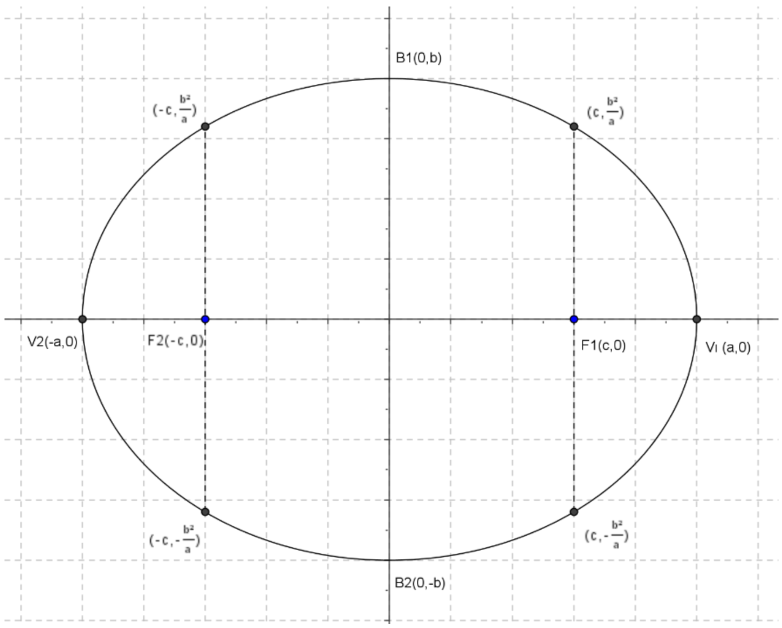
Así los puntos extremos del lado recto son.

$$\left(c,-\frac{b^2}{a}\right) \text{ y } \left(c,\frac{b^2}{a}\right)$$

Con lo anterior se muestra que la longitud del lado recto es.

$$\sqrt{(c-c)^2+\left(\frac{b^2}{a}+\frac{b^2}{a}\right)^2}=\sqrt{\left(2\frac{b^2}{a}\right)^2}=\frac{2b^2}{a}.$$

De forma gráfica del análisis de la elipse horizontal con centro en el origen es



Ahora la elipse de forma vertical con centro en el origen, podemos hablar de manera algebraica y general de este tipo de cónica, para obtener la ecuación estándar o simétrica de la elipse.

Tracemos la elipse vertical con centro en el origen en forma general.

Los vértices con coordenadas

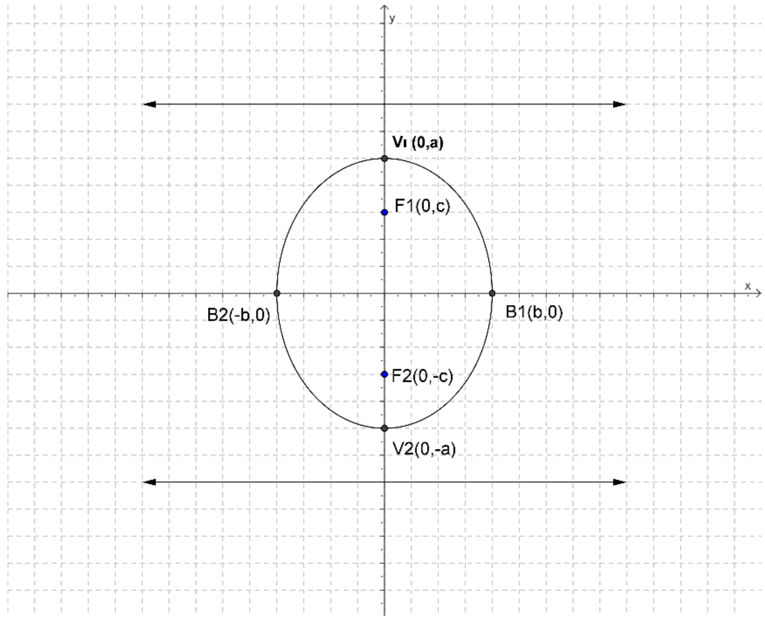
$$V_1(0,-a)\ \ ,\ \ V_2(0,a)$$

Las coordenadas de los focos que están sobre el eje $\boldsymbol{y}$.

$$F_1(0,-c)\ \ ,\ \ F_2(0,c)$$

Los extremos del eje menor que tienen como coordenadas

$$B_1(-b,0)\ \ ,\ \ B_2(b,0)$$



Obtengamos la ecuación canónica de la elipse vertical con centro en el origen. Sea $P(x, y)$ un punto en la elipse y los focos $F_1(0, c)$ y $F_2(0, -c)$.

Por definición tenemos

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + (y - c)^2} + \sqrt{x^2 + (y + c)^2} = 2a$$

Realizando operaciones algebraicas, como el elevar al cuadrado, agrupación de términos semejantes, simplificación y factorización se obtiene

Y haciendo la relación

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

Sustituyendo en la ecuación tenemos

$$a^2b^2 = a^2x^2 + b^2y^2.$$

Dividendo entre a^2b^2, se obtiene la ecuación ordinaria o cartesiana

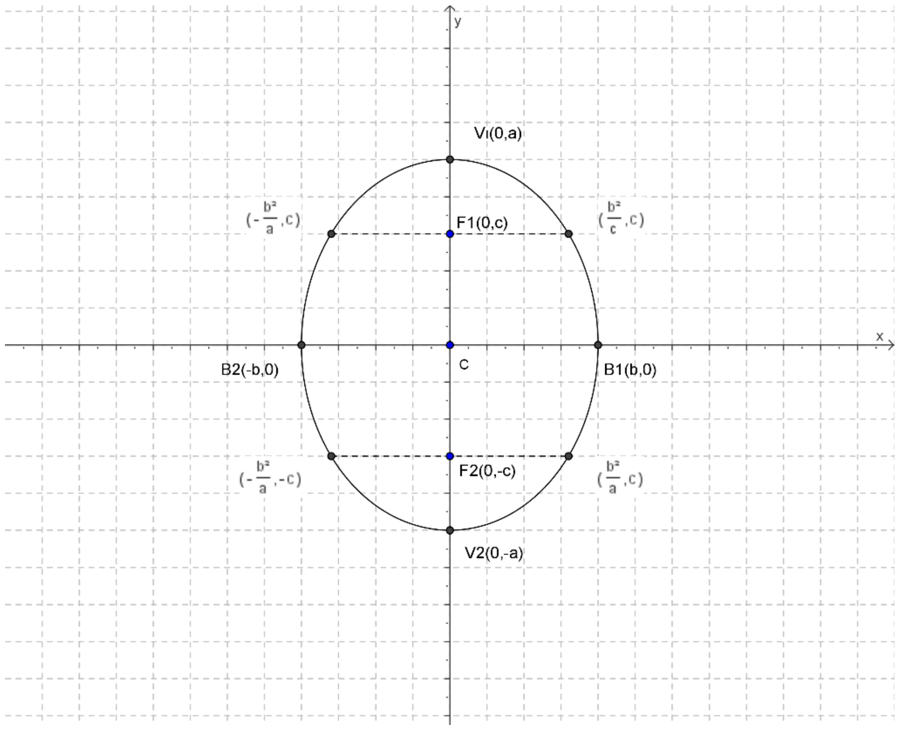
$$1 = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2}$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Para obtener la ecuación general se multiplican ambos lados de la igualdad por a^2b^2 y se iguala a cero.

$$a^2x^2 + b^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

La gráfica de la elipse vertical con centro en el origen



Con el análisis de las elipses **con centro en el origen** de forma horizontal y vertical, se pueden resolver los siguientes ejercicios conceptuales.

Ejercicios Conceptuales

Completar las siguientes preguntas.

1) Una elipse es el conjunto de ____________________, tales que la ________de las distancias de P a ____________ puntos fijos F_1 y ___________ del plano, llamados ________________, es constante.
2) Las coordenadas de los vértices de una elipse horizontal con centro en el origen son V_1 (_____,_____), V_2 (_____,_____). .
3) Las coordenadas de los focos de una elipse vertical con centro en el origen son F_1 (_____,_____), F_2 (_____,_____). .

4) La ecuación estándar o simétrica de una elipse horizontal con centro en el origen es _______.
5) De los parámetros a, b, c la medida entre ellos debe cumplir a _____ b, a _____ c .
6) La longitud del eje mayor de cualquier elipse con centro en el origen es __________.
7) La longitud del eje focal de cualquier elipse es __________.
8) La longitud del diámetro menor de cualquier elipse es _________.
9) La longitud del ancho focal de cualquier elipse es ______________.

Para confirmar tus respuestas te ayudará la siguiente tabla de los elementos y las ecuaciones de la elipse horizontal y vertical con centro en el origen.

Elementos y ecuaciones	**Elipse Horizontal**	**Elipse Vertical**
Centro	$(0,\ 0)$	$(0,\ 0)$
Vértices	$V(\pm a, 0)$	$V(0, \pm a)$
Focos	$F(\pm c, 0)$	$F(0, \pm c)$
Extremos del eje menor	$B(0, \pm b)$	$B(\pm b, 0)$
Ecuación ordinaria o cartesiana	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
Ecuación general	$Ax^2 + By^2 + F = 0$	$Ax^2 + By^2 + F = 0$
Longitud del eje mayor	$V_1V_2 = 2a$	$V_1V_2 = 2a$
Longitud del diámetro menor	$B_1B_2 = 2b$	$B_1B_2 = 2b$

Distancia focal	$F_1F_2 = 2c$	$F_1F_2 = 2c$
Longitud del lado recto	$\dfrac{2b^2}{a}$	$\dfrac{2b^2}{a}$
Coordenadas de los extremos de la elipse	$\left(c,\pm\dfrac{b^2}{a}\right),\left(-c,\pm\dfrac{b^2}{a}\right)$	$\left(\pm\dfrac{b^2}{a},c\right),\left(\pm\dfrac{b^2}{a},-c\right)$

A continuación se presentan ejercicios que te ayudarán a entender la construcción de la elipse y sus ecuaciones, sin importar que sea horizontal o vertical con centro en el origen.

En esta sección van a encontrar ejemplos y ejercicios con diversos datos, pero hay que obtener la ecuación cartesiana y general, de la elipse así como el trazo de su gráfica.

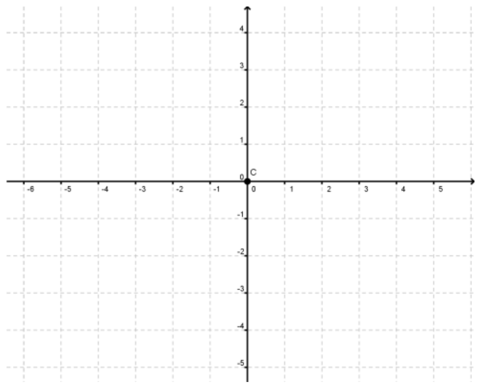
Ejemplo 1.

Encontrar la ecuación general de la elipse con su eje mayor sobre el eje x, con centro en el origen, eje mayor igual a 20 unidades y semieje menor a 3 unidades. Traza la cónica.

Solución:

Es necesario identificar el tipo de cónica y en este ejercicio es una elipse horizontal, porque el eje mayor está sobre el eje x.

Tracemos en el plano coordenado el centro



Para obtener el valor del parámetro a utilizamos que el eje mayor mide 20

$$2a = 20$$

$$a = \frac{20}{2}$$

$$a = 10.$$

Ahora para saber el valor del parámetro b, que es la distancia que existe del centro a cualquier extremo del eje menor, y como sabemos que el semieje menor es 3, entonces $b = 3$.

Para obtener la ecuación estándar o canónica de la elipse es suficiente tener los parámetros a y b. Substituyendo en la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{(10)^2} + \frac{y^2}{(3)^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \textit{ecuación ordinaria}$$

Ya que se obtuvo la ecuación ordinaria podemos obtener la ecuación general:

Multiplicando ambos lados de la igualdad por su mínimo común múltiplo 900 de 100 y 9.

$$900\left(\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{9}\right) = (1)(900)$$

$$9x^2 + 100y^2 = 900$$
$$9x^2 + 100y^2 - 900 = 0 \quad ecuación \quad general.$$

Para graficar la elipse es necesario tener el valor del parámetro c, por medio, al teorema de Pitágoras, con relación a la elipse y es

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$
$$c = \sqrt{(100)^2 - (3)^2}$$
$$= \sqrt{100 - 9}$$
$$= \sqrt{91}$$
$$\approx 9.54.$$

Las coordenadas de los vértices son

$$V_1(-a,0) = V_1(-10,0), \quad V_2(a,0) = V_2(10,0).$$

Las coordenadas de los focos son

$$F_1(-c,0) \approx F_1(-9.5,0), \quad F_2(c,0) \approx F_2(9.5,0).$$

Las coordenadas de los extremos del eje menor son

$$B_1(0,-b) = B_1(0,-3), \quad B_2(0,b) = B_2(0,3).$$

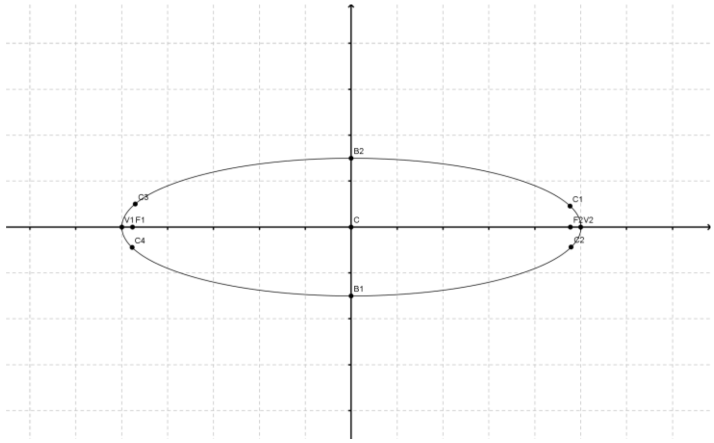
Para obtener los extremos de la cuerda que pasa por uno de los focos de la elipse es necesario el lado recto dividido entre 2 que es

$$\frac{b^2}{a} = \frac{9}{10} = 0.9$$

Donde las coordenadas de los extremos de las cuerdas que pasan por los focos son

$$C_1\left(c, \frac{b^2}{a}\right) \approx C_1(9.5,0.9) \ ; \ C_2\left(c, -\frac{b^2}{a}\right) \approx C_2(9.5,-0.9)$$
$$C_3\left(-c, \frac{b^2}{a}\right) \approx C_3(-9.5,0.9) \ ; \ C_4\left(-c, \frac{-b}{a}\right) \approx C_4(-9.5,-0.9).$$

La gráfica de la elipse es



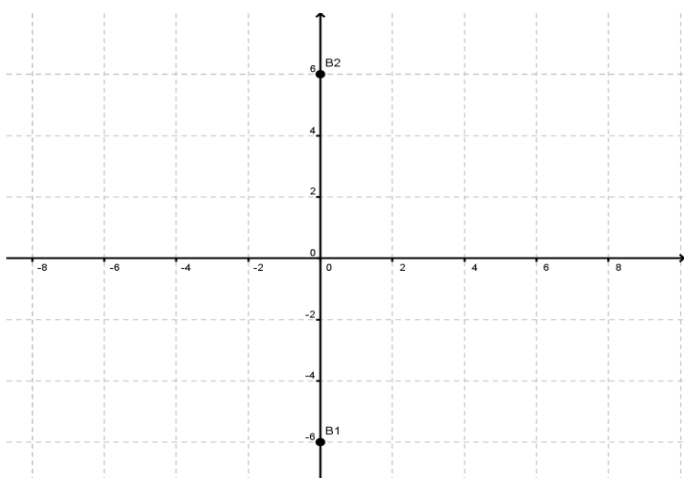
Realicemos otro ejercicio con otros elementos como datos.

Ejemplo 2.

Trazar la elipse que tiene como extremos del eje menor $B_1(0,-6)$, $B_2(0,6)$ **y la longitud del eje mayor es 14 y encontrar la ecuación general.**

Solución.

Primero tracemos en el plano xy las coordenadas de los extremos del eje menor.



Ahora obtengamos el tipo de elipse que en este ejercicio es de forma horizontal y al obtener el centro que es el punto medio de los extremos del eje menor, sus coordenadas coinciden con el origen, la distancia del centro a cualquier extremo del eje menor es el valor del parámetro b que mide $b=6$.

La forma que tiene esta cónica es horizontal puesto que los extremos del eje menor están sobre el eje y. Los vértices y focos deben estar sobre el eje x.

Para obtener el valor del segundo parámetro utilizamos la longitud del eje mayor que es $2a$ y el valor del parámetro a es

$$
\begin{aligned}
2a &= 14 \\
a &= \frac{14}{2} \\
a &= 7 \quad \textit{unidades}
\end{aligned}
$$

Al tener los valores de los parámetros a y b se puede encontrar la ecuación estándar.

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\
\frac{x^2}{(7)^2} + \frac{y^2}{(6)^2} &= 1 \\
\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} &= 1 \quad \textit{ecuación cartesiana.}
\end{aligned}
$$

Para trazar la elipse es necesario obtener las coordenadas de los vértices que son

$$V_1 = (-a,0) = V_1(-7,0) \quad , \quad V_2(a,0) = V_2(7,0)$$

Para obtener el valor del parámetro c usamos la relación

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Despejando c

$$
\begin{aligned}
c &= \sqrt{a^2 - b^2} \\
c &= \sqrt{(7)^2 - (6)^2} \\
&= \sqrt{49 - 36} \\
&= \sqrt{13} \\
&\approx 3.6.
\end{aligned}
$$

Las coordenadas de los focos son

$$F_1(-c,0) \approx F_1(-3.6,0) \quad , \quad F_2(c,0) \approx F_2(3.6,0).$$

Obtengamos el valor de los extremos de la cuerda que pasa por uno de los focos de la elipse

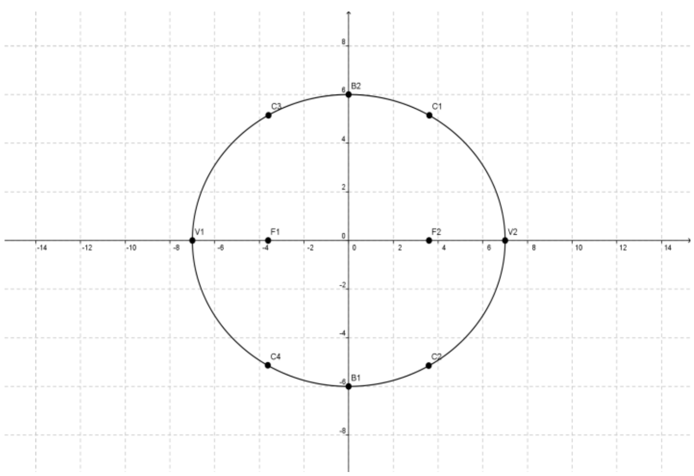
$$\frac{b^2}{a} = \frac{36}{7} \approx 5.1.$$

Las coordenadas de los extremos de la cuerda con respecto a cada foco son

$$C_1\left(c, \frac{b^2}{a}\right) \approx C_1(3.6, 5.1) \quad , \quad C_2\left(c, -\frac{b^2}{a}\right) \approx C_2(3.6, -5.1)$$

$$C_3\left(-c, +\frac{b^2}{a}\right) \approx C_3(-3.6, 5.1) \quad , \quad C_4\left(-c, -\frac{b^2}{a}\right) \approx C_4(-3.6, -5.1).$$

La gráfica de la elipse es

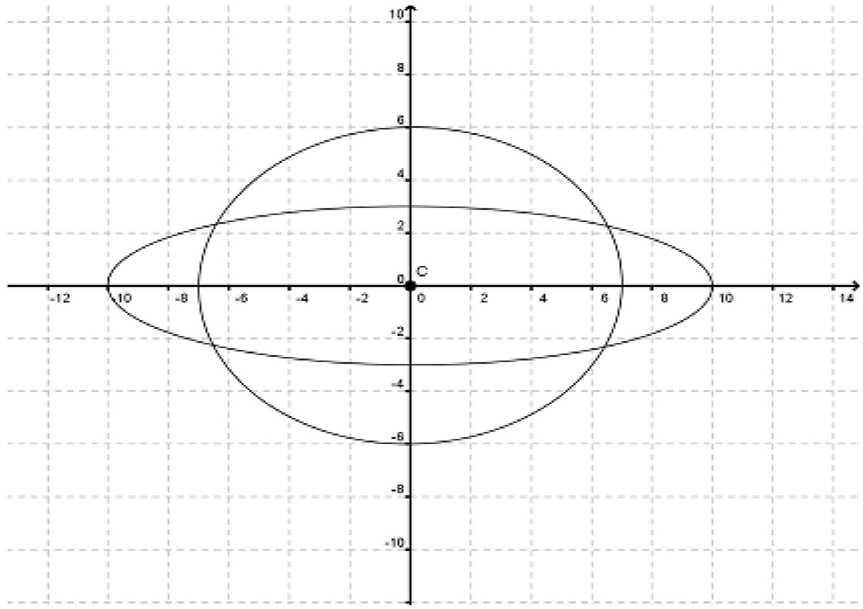


La excentricidad

Observar las ecuaciones de los ejercicios anteriores y sus gráficas,

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{9} = 1 \; ; \quad \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1$$

Donde sus gráficas son



La primera elipse es más alargada que la segunda, para medir este alargamiento veamos los parámetros a, b y c de ambas elipses.

La primera elipse tiene $a=10,\quad b=3$ y $c=\sqrt{91}\approx 9.5$ y

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{91}}{10}\approx 0.95.$$

La segunda elipse tiene $a=7$, $b=6$ y $c=\sqrt{13}\approx 3.6$ y

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{7}\approx 0.52.$$

Este cociente es menor que el primer cociente.

La manera de medir el alargamiento de una elipse es por su **excentricidad** la cual se define como el cociente de la distancia focal $2c$ entre el eje mayor $2a$.

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}.$$

Como sabemos que $c<a$ entonces el valor de la excentricidad va estar entre los valores

$$0<e<1.$$

Si la excentricidad está más cerca del uno, la elipse será más alargada, y si está cerca del cero será más parecida a un círculo.

La excentricidad se puede definir para cualquier cónica. Si sabemos su valor tendremos el tipo de cónica que es.

Si la $e=0$, es porque $c=0$, significa que los dos focos están en el mismo lugar, entonces es un círculo.

Realicemos ahora un ejercicio donde uno de sus datos es la excentricidad.

Ejercicio 1.

Obtener la ecuación estándar de la elipse de forma vertical que tiene como excentricidad $e=\frac{3}{5}$ y la longitud del eje mayor es 10 unidades.

Solución.

La longitud del eje mayor es $2a=10$, el valor de $a=5$

Si la excentricidad es $e=\frac{3}{5}$ sustituyendo $a=5$

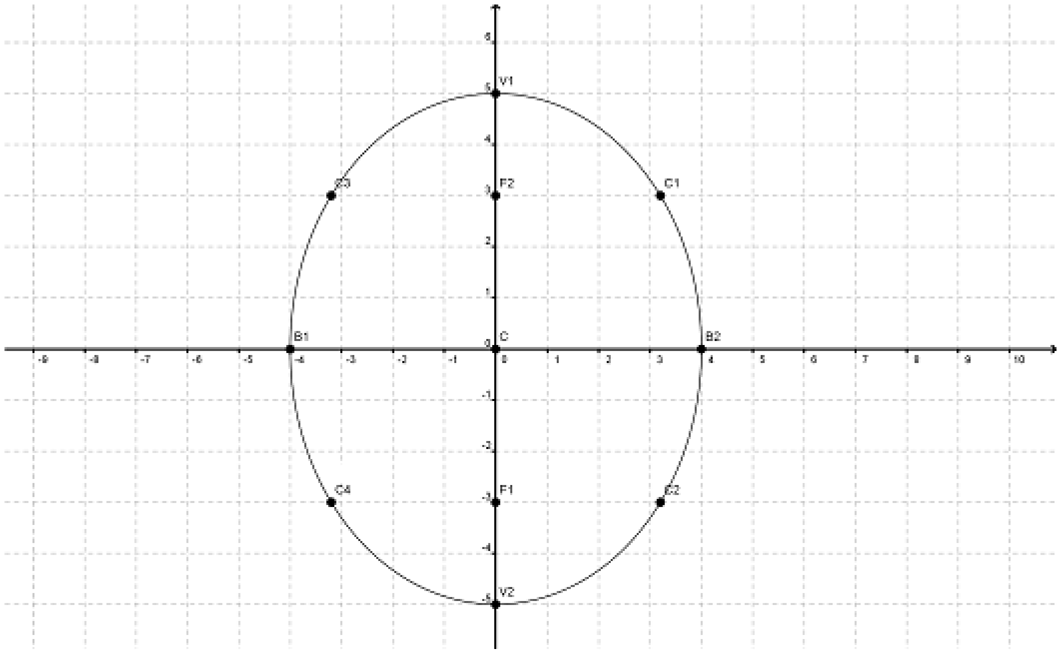
Obtengamos el valor de b

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{a^2-c^2} \\ b &= \sqrt{(5)^2-(3)^2} \\ &= \sqrt{25-9} \\ &= \sqrt{16} \\ &= 4. \end{aligned}$$

La ecuación de la elipse es

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \\ &\frac{x^2}{(4)^2}+\frac{y^2}{(5)^2}=1 \\ &\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1 \quad \textit{ecuación cartesiana.} \end{aligned}$$

La gráfica de la elipse es



Ahora en los siguientes ejercicios obtengamos los elementos y la gráfica de la elipse dada la ecuación cartesiana o general.

Ejercicio 2.

Dada la ecuación $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ **encontrar la excentricidad y trazar la elipse.**

Solución:

Para saber el tipo de cónica dada la ecuación, observamos el denominador de mayor valor. Como se encuentra debajo de la x^2, esto implica que es una elipse horizontal y con centro en el origen.

El valor del parámetro a es

$$a^2 = 25$$
$$a = \sqrt{25}$$
$$a = 5.$$

El valor del parámetro b es

$$b^2 = 9$$
$$b = \sqrt{9}$$
$$b = 3.$$

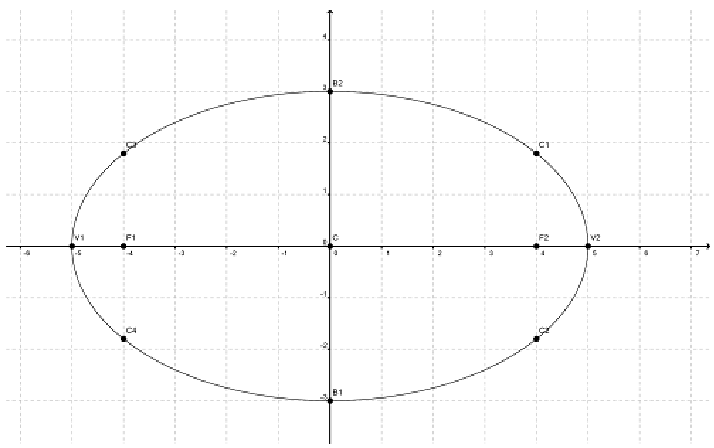
Es necesario el parámetro $c,$ con la relación

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$
$$c = \sqrt{(5)^2 - (3)^2}$$
$$c = \sqrt{25 - 9}$$
$$c = \sqrt{16}$$
$$c = 4.$$

La excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8$

Con este valor la elipse es alargada.

La gráfica de la elipse es



Otro ejercicio similar al anterior pero de forma vertical es el siguiente.

Ejercicio 3.

Obtener el valor de la excentricidad y la gráfica de la elipse que tiene como ecuación $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$.

Solución.

El tipo de elipse es de forma vertical porque el denominador de mayor valor se encuentra en y^2 y con el centro en el origen. Obtenemos los parámetros a y b

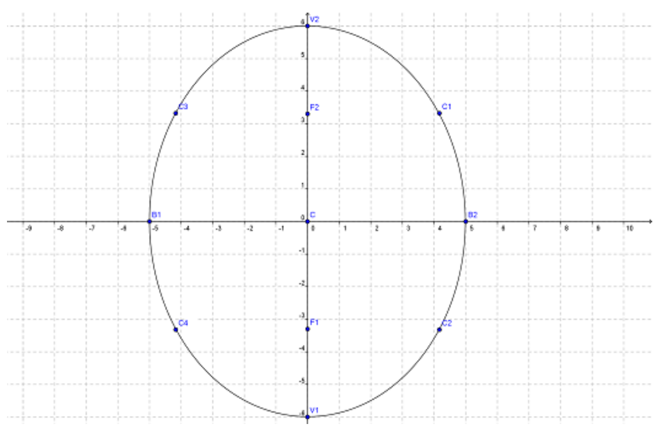
$$a^2 = 36$$
$$a = \sqrt{36}$$
$$a = 6$$
$$b^2 = 25$$
$$b = \sqrt{25}$$
$$b = 5.$$

Encontremos el valor del parámetro c

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$
$$c = \sqrt{(6)^2 - (5)^2}$$
$$= \sqrt{36 - 25}$$
$$= \sqrt{11}$$
$$\approx 3.3.$$

La excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{11}}{6} \approx 0.55$ esto significa que la elipse no es alargada.

La gráfica de la elipse es



Para facilitar la obtención de los elementos y ecuaciones de las elipses se recomienda recordar lo siguiente.

Para Recordar

Dado los datos se recomienda que se siga el siguiente análisis:

1) Trazar el plano coordenado y localizar los elementos, dados.
2) Identificar el tipo de elipse por medio de los elementos localizados, si es horizontal o vertical.
3) Obtener las coordenadas del centro siendo en el origen o fuera del origen.
4) Encontrar el valor de dos parámetros que se encuentren en los elementos dados.
5) Aplicando el Teorema de Pitágoras correspondiente a las condiciones de la elipse, obtener el valor del 3er parámetro.

A continuación resuelve los siguientes ejercicios

Ejercicios.

I) Determinar la ecuación canónica, la ecuación general y trazar la gráfica de la elipse que tiene como elementos:

1) Vértices $V_1(5,0)$, $V_2(-5,0)$ y longitud del eje menor 8.
2) Focos $F_1(0,2)$, $F_2(0,-2)$ y longitud del eje mayor 10.
3) Vértices $V_1(0,6)$, $V_2(0,-6)$ y longitud del lado recto 6.
4) Extremos del eje menor $B_1(0,4)$, $B_2(0,-4)$ y longitud del eje focal 10.
5) Vértice $V_1(5,0)$, centro $C(0,0)$, foco $F_1(4,0)$.
6) Focos $F_1(0,3)$, $F_2(0,-3)$ y longitud del eje menor 6.
7) Vértices $V_1(4,0)$, $V_2(-4,0)$ y excentricidad $e=\frac{1}{2}$.
8) Focos $F_1(3,0)$, $F_2(-3,0)$ y semieje mayor 6.
9) Centro $C(0,0)$, vértice $V_1(0,7)$ y un extremo del eje menor $B_2(-5,0)$.
10) Focos $F_2(-6,0)$, $F_1(6,0)$ y excentricidad $e=\frac{2}{3}$.

II) Encontrar el valor de la excentricidad y trazar la gráfica de la elipse que tiene como ecuación estándar o general.

1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$
2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

3) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1$
4) $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{25}=1$
5) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$
6) $3x^2+2y^2-6=0$
7) $9x^2+25y^2-225=0$
8) $x^2+4y^2-4=0$
9) $13x^2+9y^2-117=0$
10) $9x^2+y^2-9=0$

Elipse Horizontal y Vertical Fuera Del Origen

Ahora veamos los elementos de la elipse con centro fuera del origen, es decir, con coordenadas $C(h,k)$. Los elementos se modificarán a partir del movimiento del centro.

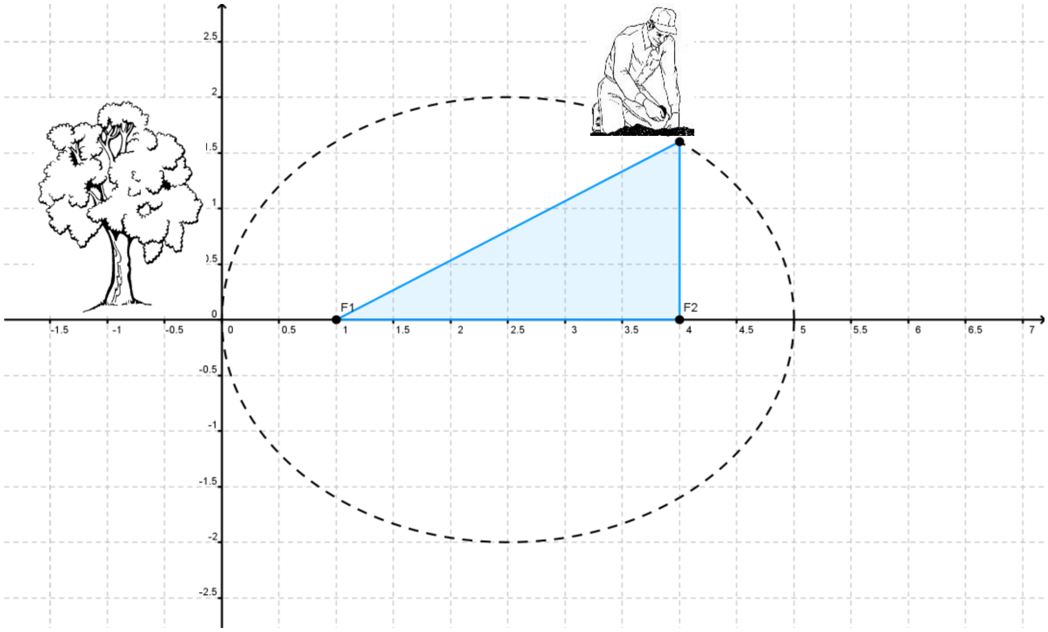
Por medio de un problema sencillo veamos cómo introducción la elipse con centro $C(h,k)$ donde h y k son distintas de cero.

Un jardinero desea sembrar flores de forma elíptica en el jardín, elevando dos estacas separadas entre sí 3 metros y atando un cordel de 5 metros entre ellas.

Con otra estaca tensa, recorre la cuerda de un extremo al otro, y ambos lados del segmento imaginario que une las estacas, de esta forma traza la elipse.

Si las estacas están en las coordenadas $F_1(1,0)$ y $F_2(4,0)$, encuentra:

a) La ecuación de la elipse que trazó el jardinero.
b) Se desea sembrar un árbol en la coordenada $(0,0)$, dentro del arreglo elíptico del jardín ¿quedará éste en la elipse



a) Escribimos la definición de elipse con estas características

$$|PF_1| + |PF_2| = 5$$

Consideramos el punto $P(x, y)$ en la elipse, $F_1(1,0)$ y $F_2(4,0)$ entonces

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 5.$$

Eliminando un radical y simplificando tenemos.

$$(x-1)^2 + y^2 = 25 - 10\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + (x-4)^2 + y^2.$$

Desarrollando y simplificando

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 25 - 10\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + x^2 - 8x + 16 + y^2$$

$$10\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = -6x + 40.$$

Dividiendo la ecuación entre dos

$$5\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = -3x + 20.$$

Elevando al cuadrado para eliminar el radical

$$25(x^2 - 8x + 16 + y^2) = 9x^2 - 120x + 400$$

$$25x^2 - 200x + 400 + 25y^2 = 9x^2 - 120x + 400.$$

Ordenando y simplificando

$$16x^2 + 25y^2 - 80x = 0 \quad ecuación \quad general.$$

b) Para ver si el punto $(0,0)$ está en elipse es suficiente sustituir los valores de $x = 0$ y $y = 0$ en la ecuación general.

$$16(0)^2 + 25(0)^2 - 80(0) = 0$$

La coordenada $(0,0)$ satisface la ecuación esto significa que dicho punto está sobre la elipse y el árbol se puede sembrar dentro del trazo elíptico, como lo muestra la gráfica.

Con este ejemplo podemos deducir de manera formal la ecuación de la elipse horizontal con centro fuera del origen $C(h,k)$ a partir de la definición.

Sean los puntos $P(x,y), F_1(h-c,k), \quad F_2(h+c,k)$ donde.

$$F_1P + F_2P = 2a$$

$$\sqrt{(x-(h+c))^2 + (y-k)^2} + \sqrt{(x-(h-c))^2 + (y-k)^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x-(h+c))^2 + (y-k)^2} = 2a - \sqrt{(x-(h-c))^2 + (y-k)^2}.$$

Haciendo operaciones algebraicas como elevando al cuadrado en ambos miembros, agrupación de términos semejantes, simplificación y factorizando obtenemos la ecuación cartesiana de una elipse horizontal con centro fuera del origen.

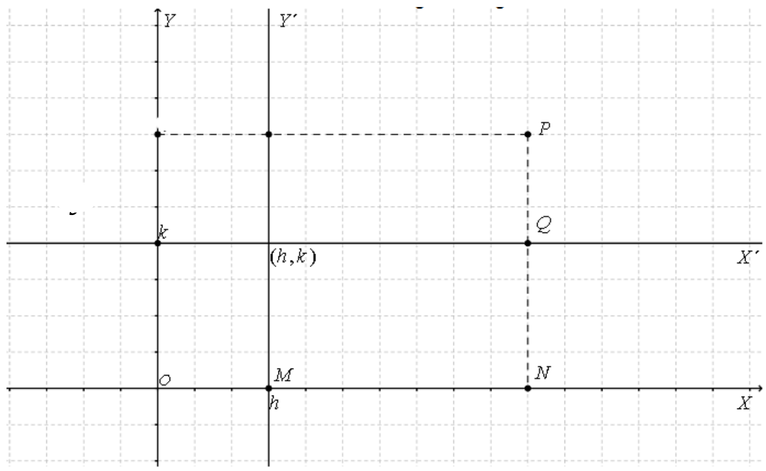
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Otra forma más simple es por medio de traslación de ejes que a continuación explicamos.

Transformación de Coordenadas

El proceso de cambiar un par de ejes a otro se llama transformación de coordenadas. La más general de éstas es en la que los ejes nuevos no son paralelos a los ejes antiguos, y los orígenes son diferentes. Ahora, sin embargo consideraremos transformaciones en las cuales los ejes nuevos son paralelos a los ejes originales y con la misma dirección.

Una transformación de este tipo se llama “traslación de ejes”. Las coordenadas de cada punto del plano se cambian por una traslación de ejes. Para ver como se cambian las coordenadas examinamos la siguiente figura.



Para el eje de la X

$$x = ON = OM + MN$$
$$x = h + x'$$
$$\therefore x = x' + h$$

para el eje de la Y

$$y = NP = NQ + QP$$
$$y = k + y'$$
$$\therefore y = y' + k$$

Estas son las fórmulas de una traslación de ejes.

Y también podemos obtener x' y y' de las fórmulas anteriores

$$x' = x - h, \; y' = y - k.$$

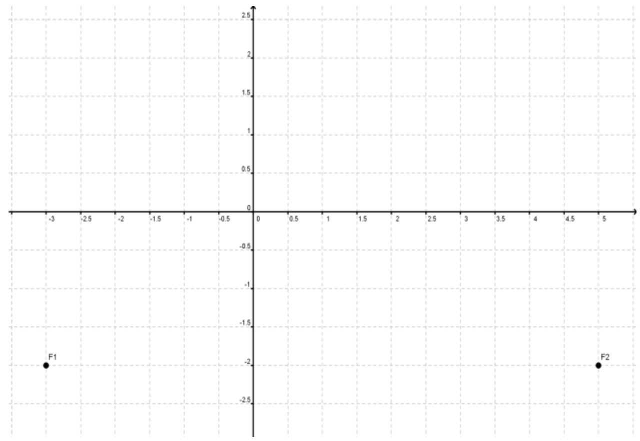
Para mejor comprensión hagamos unos ejemplos de traslación de ejes.

Ejemplo 1

Encontrar la ecuación general de la elipse que tiene como focos $F_1(-3,-2)$, $F_2(5,-2)$ y la longitud del eje mayor es 10.

Solución.

Localicemos los focos en el plano xy



Obtengamos el punto medio de los focos que es el centro de la elipse

$$C\left(\frac{-3+5}{2},\frac{-2-2}{2}\right)=C(1,-2)=O'.$$

Siendo este punto el nuevo origen en el eje $X'Y'$

El valor del parámetro c es la distancia que existe del centro a cualquier foco que es $c=4$.

Obtengamos el valor de los parámetros a y b para encontrar la ecuación de la elipse horizontal.

El eje mayor es 10 esto es

$$2a=10$$

$$a=5.$$

Aplicando teorema de Pitágoras con respecto a la elipse

$$b^2=a^2-c^2$$

$$b=\sqrt{(5)^2-(4)^2}$$

$$b=\sqrt{25-16}$$

$$b=\sqrt{9}$$

$$b=3.$$

Usando las fórmulas de traslación de ejes tenemos,

$$x' = x - h = x - (1) = x - 1$$
$$y' = y - k = y - (-2) = y + 2 \quad \textit{ecuación de traslación}$$

La ecuación cartesiana de la elipse horizontal es

$$\frac{x'^2}{25} + \frac{y'^2}{9} = 1.$$

Multiplicando por el mínimo común múltiplo de 25 y 9 que es 225.

$$\left(\frac{x'^2}{25} + \frac{y'^2}{9}\right)225 = (1)225.$$

La ecuación general en el plano $X'Y'$ es

$$9(x')^2 + 25(y')^2 - 225 = 0.$$

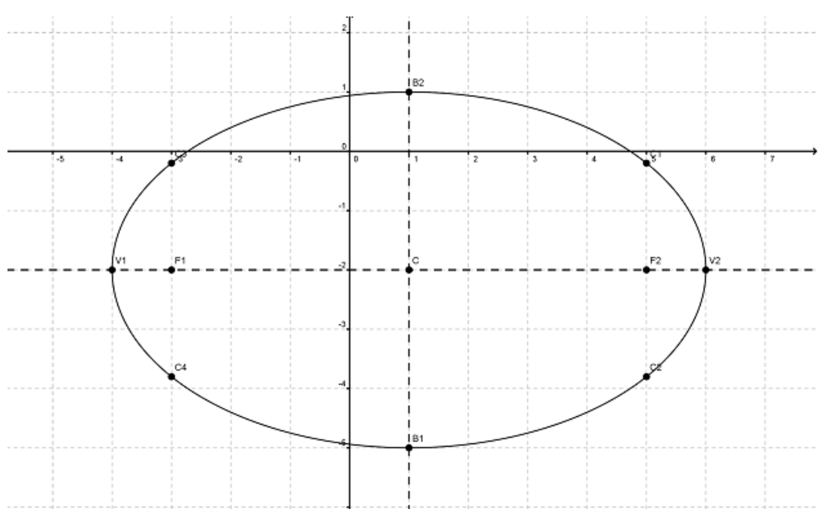
Para obtener la ecuación en el plano xy sustituimos los valores de x', y' de las fórmulas de traslación esto es

$$9(x-1)^2 + 25(y+2)^2 - 225 = 0$$

Realizando operaciones algebraicas y simplificando obtenemos la ecuación general de la elipse en el plano XY.

$$9(x^2 - 2x + 1) + 25(y^2 + 4y + 4) - 225 = 0$$
$$9x^2 - 18x + 9 + 25y^2 + 100y + 100 - 225 = 0$$
$$9x^2 + 25y^2 - 18x + 100y - 116 = 0$$

La gráfica de la elipse es



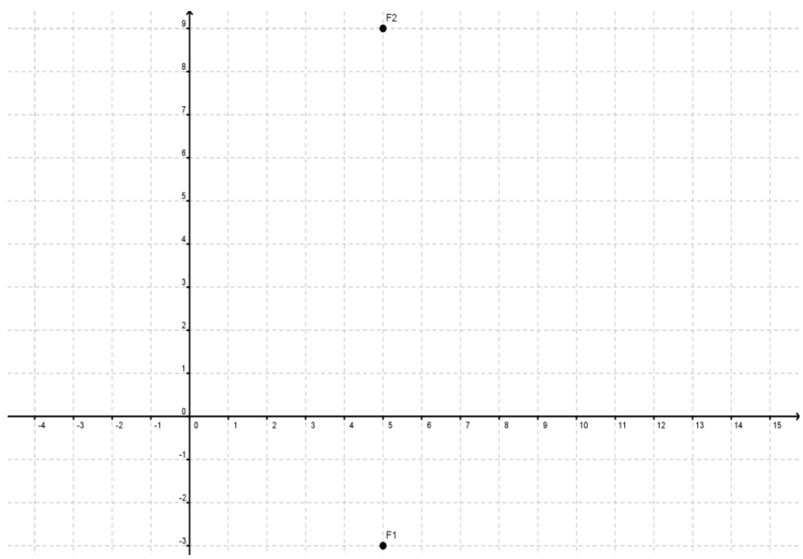
Con este ejemplo aprendimos que una ecuación en el plano XY puede tener otra ecuación según los ejes a los que esté referida, en esta ocasión fue el centro en el origen en el plano $X´Y´$, para obtener la ecuación de la elipse donde su centro no estaba en el origen.

Ejemplo 2.

Encontrar la ecuación general de la elipse en el plano XY y trazar su gráfica que tiene como elementos $F_1(5,-3)$, $F_2(5,9)$ y el valor de la excentricidad es $\frac{2}{3}$.

Solución

Localicemos los focos en el plano XY



La elipse tiene forma vertical y centro fuera del origen.

Para encontrar el centro es necesario el punto medio de los focos que es

$$C\left(\frac{5+5}{2},\frac{-3+9}{2}\right)=C(5,3)=O´.$$

Y a la vez es el origen de traslación a los nuevos ejes $X´Y´$.

La distancia del centro a cualquier foco es el valor del parámetro c que es $c=6$.

Para encontrar el valor del parámetro a utilizaremos la excentricidad que tiene la elipse

$$e = \frac{c}{a}$$
$$\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$$

Se sustituye el valor de $c = 6$ en la ecuación tenemos

$$\frac{6}{a} = \frac{2}{3}$$
$$a = \frac{6(3)}{2}$$
$$a = 9.$$

Por el teorema de Pitágoras en relación a la elipse encontramos el valor del parámetro b

$$b^2 = a^2 - c^2$$
$$b = \sqrt{(9)^2 - (6)^2}$$
$$b = \sqrt{81 - 36}$$
$$b = \sqrt{45}$$
$$b \approx 6.7.$$

Ahora se tienen los valores de a, b y c para graficar la elipse vertical.

Encontramos las ecuaciones de traslación al punto $O'(5,3)$ en el plano $X'Y'$.

$$x' = x - h = x - (5) = x - 5.$$
$$y' = y - k = y - (3) = y - 3.$$

La ecuación canónica de la elipse vertical en el nuevo plano es

$$\frac{(x')^2}{45} + \frac{(y')^2}{81} = 1.$$

Multiplicamos por 405 para obtener la ecuación general

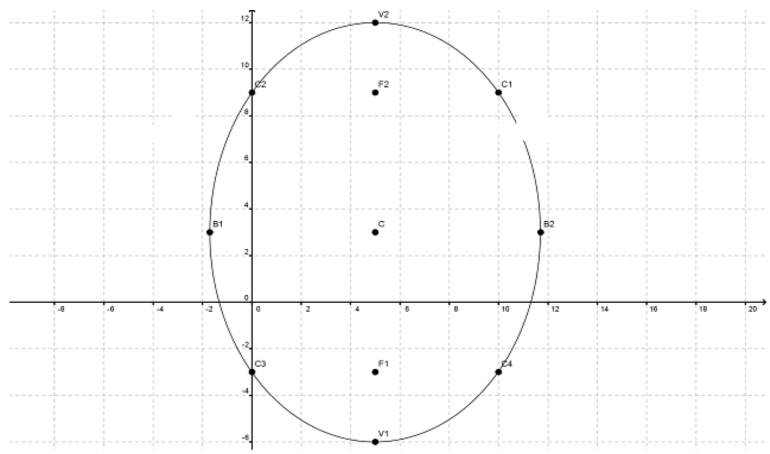
$$9(x')^2 + 5(y')^2 - 405 = 0.$$

Para encontrar la ecuación general en el plano XY sustituimos las ecuaciones de traslación

$$9(x-5)^2 + 5(y-2)^2 - 405 = 0$$
$$9(x^2 - 10x + 25) + 5(y^2 - 4y + 4) - 405 = 0$$
$$9x^2 - 90x + 225 + 5y^2 - 20y + 20 - 405 = 0$$
$$9x^2 + 5y^2 - 90x - 20y - 160 = 0.$$

Es la ecuación general de la elipse vertical en el plano XY.

La gráfica de la elipse vertical es



A continuación realicemos ejercicios de la elipse con centro fuera del origen a partir de sus ecuaciones para trazar la cónica.

Ejemplo 3

Graficar la elipse que tiene como ecuación canónica

$$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{9}=1.$$

Solución.

Es importante identificar el tipo de elipse de la que se trata, en este caso es una elipse horizontal porque el parámetro a^2 que es mayor de b^2, está como denominador en donde aparece la variable x y tiene centro fuera del origen, donde su centro podemos encontrarlo por medio de la ecuación de traslación.

$$x' = x-1.$$

$$x-h = x-1$$

Despejando h obtenemos

$$x = x'+1$$

$$\therefore h = 1.$$

De la misma forma encontramos el valor de k que es

$$y - k = y + 2$$
$$\therefore \quad k = -2.$$

El centro de la elipse horizontal es

$$C(1,-2).$$

Podemos obtener el valor del parámetro a porque la ecuación canónica tiene el valor de a^2 entonces

$$a^2 = 16$$
$$a = \sqrt{16}$$
$$a = 4.$$

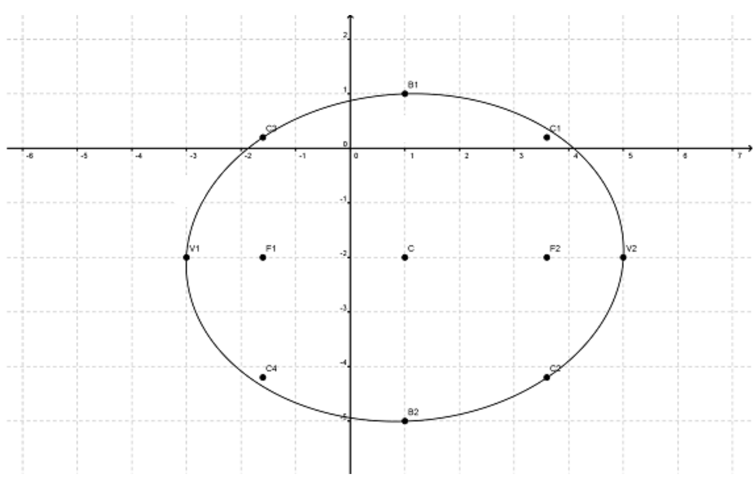
De la misma manera se encuentra el valor del parámetro b que es

$$b^2 = 9$$
$$b = \sqrt{9}$$
$$b = 3.$$

Por el teorema de Pitágoras se obtiene el valor del parámetro c

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c = \sqrt{(4)^2 - (3)^2}$$
$$c = \sqrt{16 - 9}$$
$$c = \sqrt{7}$$
$$c \approx 2.6.$$

Ahora podemos graficar a la elipse horizontal



Realicemos ahora ejercicios de elipse con centro fuera del origen, siendo horizontal o vertical.

Ejercicio 1.

Trazar la gráfica de la elipse que tiene como ecuación estándar

$$\frac{(x+3)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{25}=1.$$

Solución.

El tipo de elipse es una vertical, porque el parámetro a^2 se encuentra como denominador en la variable y, tiene centro fuera del origen. Por la ecuación de traslación obtenemos la coordenada del centro que es

$$\begin{aligned} x-h &= x+3 \\ \therefore \quad h &= -3. \end{aligned}$$

Con respecto a y tenemos

$$\begin{aligned} y-k &= y-2 \\ \therefore \quad k &= 2. \end{aligned}$$

Las coordenadas del centro son $C(-3,2)$

Ahora encontremos el valor del parámetro a por medio del valor de

$$\begin{aligned} a^2 &= 25 \\ a &= \sqrt{25} \\ a &= 5. \end{aligned}$$

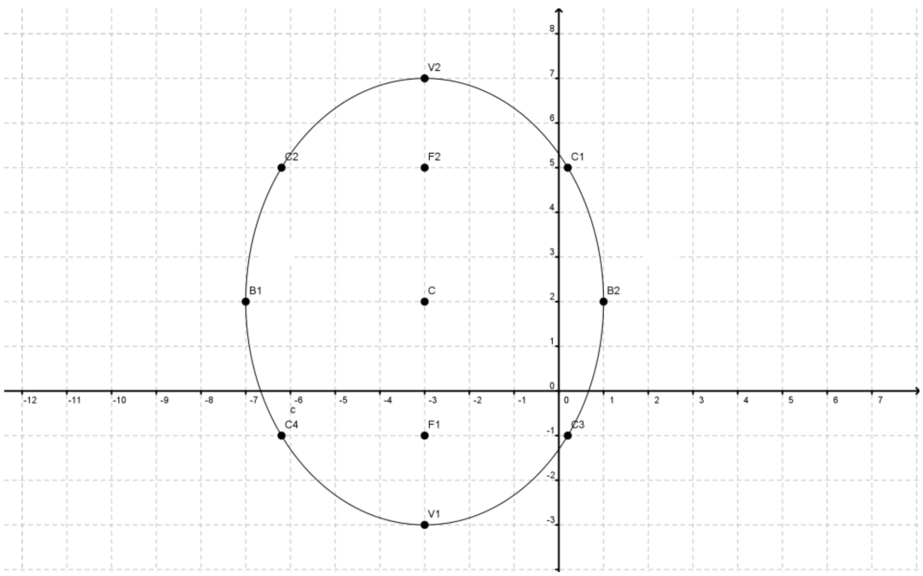
De la misma forma se obtiene el valor del parámetro b por que el valor de b^2 en la ecuación es

$$\begin{aligned} b^2 &= 16 \\ b &= \sqrt{16} \\ b &= 4. \end{aligned}$$

Teniendo los valor de a y b se puede obtener el valor de c, por medio del teorema de Pitágoras con relación a la elipse

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c = \sqrt{(5)^2 - (4)^2}$$
$$c = \sqrt{25 - 16}$$
$$c = \sqrt{9}$$
$$c = 3.$$

Con los valores de a, b y c se puede trazar la elipse vertical



En los siguientes ejercicios se aprenderá a obtener la ecuación cartesiana a partir de la ecuación general.

Ejercicio 2.

De la ecuación $2x^2 + 3y^2 - 4x + 12y - 10 = 0$ obtener la ecuación estándar de la elipse.

Solución.

Para encontrar la ecuación estándar es necesario aplicar el método de completar un trinomio cuadrado perfecto con respecto a x y y.

$$2x^2 - 4x + 3y^2 + 12y = 10.$$

Factorizamos los coeficientes de los términos cuadráticos x^2, y^2 para aplicar posteriormente el método de completar cuadrados

$$2(x^2 - 2x) + 3(y^2 + 4y) = 10.$$

En cada factor completamos el trinomio cuadrado perfecto y agregamos la misma cantidad en el segundo miembro para seguir cumpliendo la igualdad de la ecuación.

$$2(x^2 - 2x + 1) + 3(y^2 + 4y + 4) = 10 + 2 + 12.$$

Factorizando tenemos

$$2(x-1)^2 + 3(y+2)^2 = 24.$$

Dividiendo entre 24 la ecuación y simplificando

$$\frac{2(x-1)^2}{24} + \frac{3(y+2)^2}{24} = \frac{24}{24}$$
$$\frac{(x-1)^2}{12} + \frac{(y+2)^2}{8} = 1 \quad \textit{ecuación} \quad \textit{cartesiana}$$

Como 12 es mayor que 8 es una elipse horizontal con centro fuera del origen.

Ejercicio 3.

Dada la ecuación general $16x^2 + 8y^2 + 16x - 24y - 10 = 0$ obtener la ecuación estándar de la elipse.

Solución.

Aplicando el método de completar cuadrados se puede obtener la ecuación canónica.

Agrupando los términos de x y y tenemos

$$16x^2 + 16x + 8y^2 - 24y = 10$$

Factorizando los coeficientes de los términos x^2, y^2 tenemos

$$16(x^2 + x) + 8(y^2 - 3y) = 10$$

Completando trinomio cuadrado perfecto y agregamos la misma cantidad en el segundo miembro

$$16\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + 8\left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) = 10 + 4 + 18.$$

Factorizando ambos factores tenemos

$$\frac{16\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{32}+\frac{8\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{32}=\frac{32}{32}$$

$$\therefore \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{4}=1 \quad ecuación \quad estándar$$

El denominador 4 es mayor que 4, entonces la elipse es vertical y con centro fuera del origen.

Con estos ejercicios es necesario hablar de los elementos de la elipse en términos generales con centro en $C(h,k)$.

Como en el tema de traslación, aprendimos que el origen del eje $X'Y'$ era el centro de la elipse y se hacia la sustitución en las fórmulas de traslación

$$x' = x - h$$
$$y' = y - k.$$

Obteniendo la ecuación canónica en el eje $X'Y'$ para una elipse horizontal

$$\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1.$$

Donde $a^2 = b^2 + c^2$ y sustituyendo las ecuaciones de traslación tenemos la ecuación canónica o estándar de la elipse horizontal

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$$

De la misma manera si la elipse es vertical la ecuación canónica con centro en $C(h,k)$ es

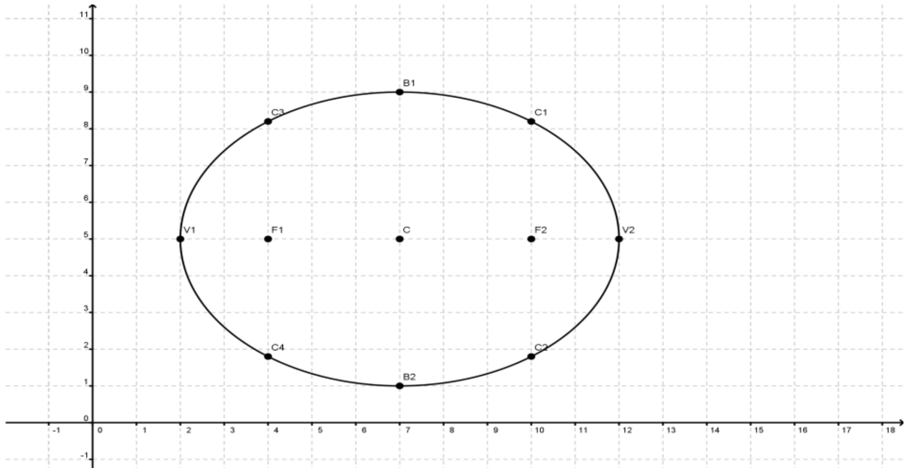
$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1.$$

En cualquiera de las ecuaciones estándar si queremos obtener la ecuación general, tenemos que desarrollar los binomios y multiplicar por a^2b^2 obteniendo.

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad ecuación \quad general$$

Donde los coeficientes A y C tienen el mismo signo, valores diferentes pero no cero. Esta ecuación representa a la ecuación general de la elipse con centro fuera del origen.

Gráficamente una elipse horizontal con centro $C(h,k)$ es.



Donde las coordenadas de los vértices son

$$V_1(h-a,k),\quad V_2(h+a,k).$$

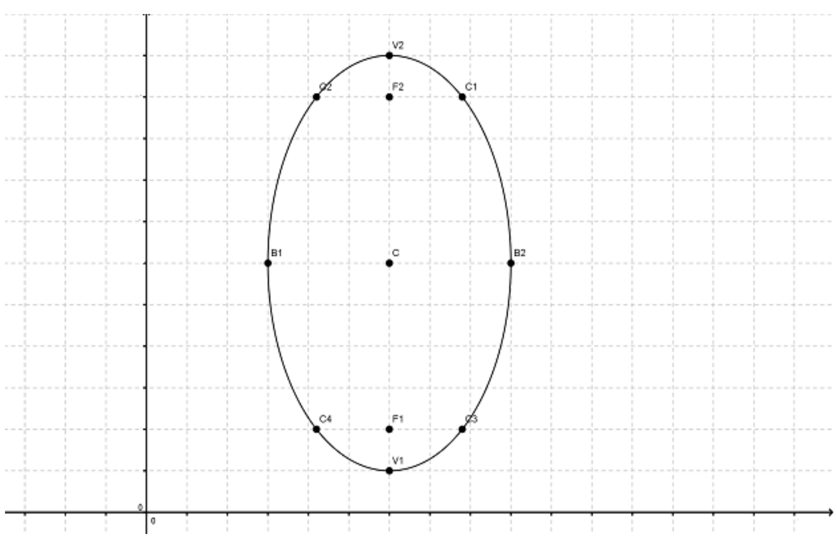
Las coordenadas de los focos son

$$F_1(h-c,k)\quad F_2(h+c,k).$$

Las coordenadas de los extremos del eje menor son

$$B_1(h,k-b),\quad B_2(h,k+b).$$

Una elipse vertical con centro en $C(h,k)$ es



Las coordenadas de los vértices son

$$V_1(h, k-a), \quad V_2(h, k+a).$$

Las coordenadas de los focos son

$$F_1(h, k-c), \quad F_2(h, k+c).$$

Y las coordenadas de los extremos del eje menor son

$$B_1(h-b, k), \quad B_2(h+b, k).$$

Para mejor comprensión de la elipse y facilitar la obtención de los elementos de la cónica, se recomienda ver la siguiente tabla para recordar los pasos a seguir y encontrar el tipo de elipse de que se trata así como sus parámetros a, b y c.

Para Recordar

Elementos y Ecuaciones	**Elipse Horizontal**	**Elipse Vertical**
Centro	$C(h,k)$	$C(h,k)$
Vértices	$V(h \pm a, k)$	$V(h, k \pm a)$
Focos	$F(h \pm c, k)$	$F(h, k \pm c)$
Extremos del eje menor	$B(h, k \pm b)$	$B(h \pm b, k)$
Ecuación estándar	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$
Ecuación general	$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$	$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$

Para Recordar

Para graficar la elipse se recomienda los siguientes pasos.

1) Identificar el tipo de elipse de la que se trata, sea horizontal o vertical por el eje mayor, focal o menor.
2) Obtener las coordenadas del centro, siendo que éste es el punto medio de los vértices, de los focos y de los extremos del eje menor.
3) Encontrar el valor de los tres parámetros a, b y c donde dependen de los elementos que se dan como datos, puesto que se proporcionan 2 de los 3 parámetros y el tercero lo obtenemos por el Teorema de Pitágoras con relación a la elipse $a^2 = b^2 + c^2$.

Ejercicios

I) Obtener la ecuación estándar y general de las siguientes elipses que tienen los siguientes elementos.

1) $V_1(-8,-1)$, $V_2(2,-1)$ y la distancia focal 6.

2) $F_1(-2,-10)$, $F_2(-2,-2)$ y la longitud del diámetro menor 8.

3) $V_1(4,-6)$, $V_2(4,4)$ y lado recto $\frac{16}{5}$

4) $B_1(-3,-4)$, $B_2(-3,4)$ longitud del diámetro mayor 10.

5) $F_1(-10,2)$, $F_2(-2,2)$ con excentricidad $\frac{1}{2}$

6) $B_1(1,3)$, $B_2(7,3)$ y $V_1(4,8)$

7) $V_1(-4,4)$, $V_2(8,4)$ y $F_1(-3,4)$

II) Graficar las siguientes elipses, dadas las ecuaciones estándar o generales.

1) $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$

2) $\frac{(x-2)^2}{49}+\frac{(y+3)^2}{64}=1$

3) $\frac{(x-5)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$

4) $\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{25}=1$

5) $\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{25}=1$

6) $\frac{x^2}{64}+\frac{(y-3)^2}{49}=1$

7) $\frac{(x+3)^2}{16}+\frac{y^2}{49}=1$

8) $4x^2+9y^2-24x-18y+9=0$

9) $9x^2+4y^2-54x-8y+49=0$

10) $9x^2+25y^2+54x-50y+221=0$

11) $11x^2 + 36y^2 + 44x - 144y - 228 = 0$

12) $3x^2 + 4y^2 + 28x - 16y + 48 = 0$

Problemas de Aplicación

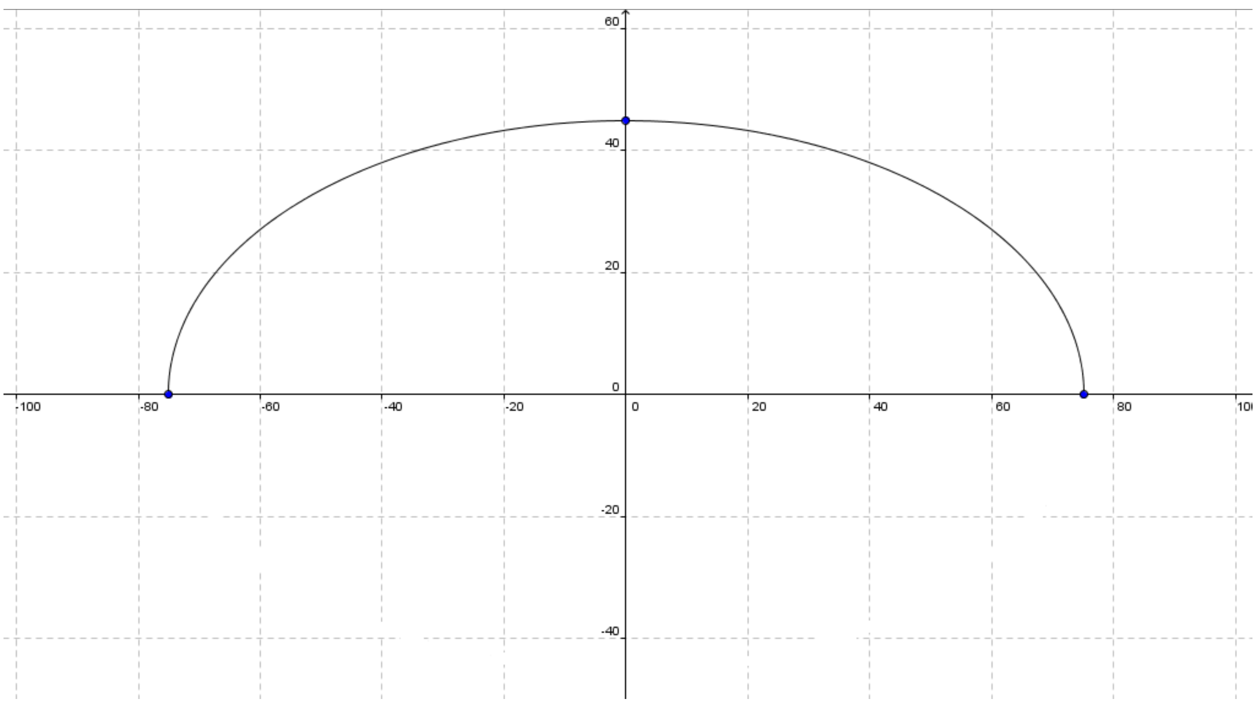
En los siguientes ejercicios se verán algunas aplicaciones de la elipse.

Ejercicio 1.

Un arco tiene forma de semielipse con una luz de 150 metros, siendo su máxima altura de 45 metros. Encontrar la longitud de dos soportes verticales situados cada uno en el lado recto, a igual distancia del extremo del arco.

Solución.

Supongamos el arco con eje mayor en el eje x como base del arco, siendo el centro en el origen, como lo muestra la siguiente gráfica.



El eje mayor mide 150 m y la altura máxima 45 m entonces los parámetros a y b son

$$a = 75 \text{ y } b = 45$$

Por el teorema de Pitágoras con relación a la elipse encontramos el valor de c

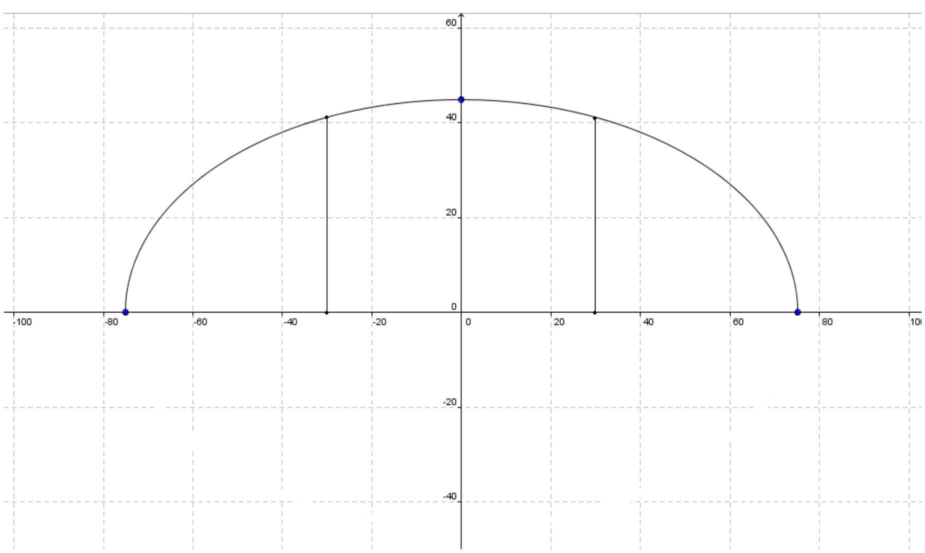
$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c = \sqrt{(75)^2 - (45)^2}$$
$$c = \sqrt{5625 - 2025}$$
$$c = \sqrt{3600}$$
$$c = 60.$$

Esto quiere decir que los soportes van a estar a 30 metros de distancia a cada lado del origen.

Para hallar la altura de los soportes hacemos $x = 30$ en la ecuación de la elipse horizontal y despejamos el valor de y

$$\frac{x^2}{(75)^2} + \frac{y^2}{(45)^2} = 1$$
$$\frac{(30)^2}{5625} + \frac{y^2}{2025} = 1$$
$$\frac{y^2}{2025} = 1 - \frac{900}{5625}$$
$$y^2 = \frac{21}{25}(2025)$$
$$y^2 = 21(81)$$
$$y = \sqrt{1701}$$
$$y = 41.24 \quad metros$$

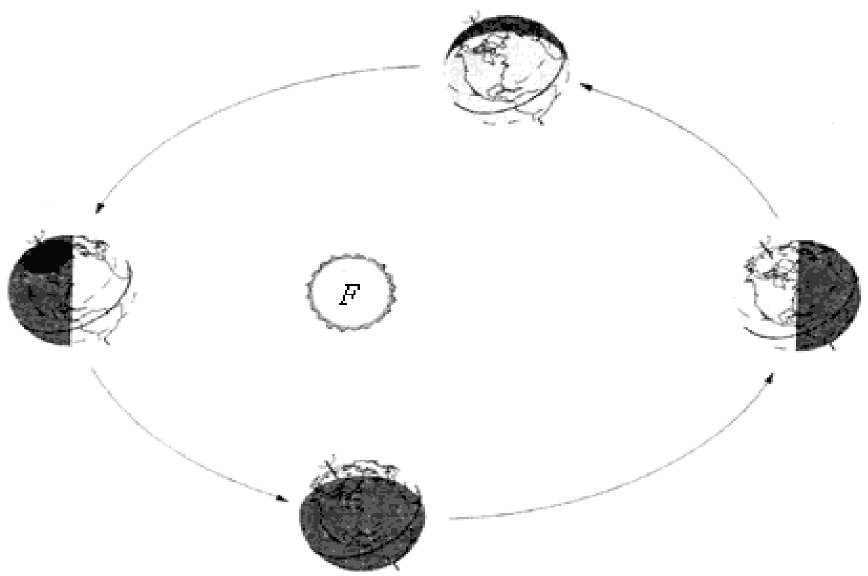
Como lo muestra la siguiente gráfica



Ejercicio 2.

La Tierra describe una trayectoria elíptica alrededor del Sol que se encuentra en uno de los focos. Sabiendo que el semieje mayor de la elipse está a 148500×10^3 **kilómetros de distancia y que la excentricidad es** $\frac{1}{62}\approx0.017$**:**

Hallar la máxima y mínima distancia de la Tierra al Sol.



Solución.

El valor del parámetro a es $a=148\,500\times10^3$ con este podemos obtener el valor del parámetro c en la fórmula de la excentricidad

$$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{62}$$
$$\frac{c}{148\,500\times10^3}=\frac{1}{62}$$

$$c\approx2395.16\times10^3$$

La máxima distancia de la Tierra al Sol es

$$a+c\approx148500\times10^3+2395.16\times10^3$$

$$\approx150895.16\times10^3$$

La mínima distancia de la Tierra al Sol es

$$a-c\approx148500\times10^3-2395.16\times10^3$$

$$\approx146104.84\times10^3$$

Problemas de Aplicación

Resuelve los siguientes problemas de aplicación.

1) La órbita de la Tierra es una elipse, con el Sol en uno de los focos. La longitud del eje mayor es 186 millones de millas y la excentricidad es 0.0167 encuentra:

a) La ecuación que representa la órbita.

b) La distancia mínima y máxima de la Tierra al Sol.

2) Un portal con estilo colonial tiene en la parte superior con arco semielíptico. Si los focos de la elipse están situados a 4 metros del eje central del arco y éste tiene una altura de 2 metros en la parte más alta. ¿Cuál es el ancho entre las columnas del portal?

3) La órbita del cometa Haley tiene una excentricidad de 0.97 y su semieje mayor mide 2885 millones de kilómetros. Deduce una ecuación de la órbita del cometa, con centro en el origen (2 soluciones)

4) Un satélite describe una órbita elíptica alrededor de la Tierra, de manera que el centro de ésta, está en uno de los focos. El punto más alejado del satélite a la superficie terrestre está a 250 mil millas y el más cercano está a 100 mil millas. Las distancias se miden a lo largo del eje mayor que está en el eje y. Supongamos que el radio de la Tierra es de 400 mil millas, encuentra la ecuación de la órbita del satélite.

5) La mínima distancia a la que se aleja la Luna de la Tierra es de 364800 kilómetros y la máxima es de 403200 kilómetros. Obtener la excentricidad de la órbita de la Luna alrededor de la Tierra.

Autoevaluación

Resuelve las siguientes preguntas.

1) Encuentra todos los elementos de la elipse que tiene como vértices $V_1(5,0), V_2(-5,0)\ y\ longitud\ del\ eje\ focal\ 8$.
2) Grafica la siguiente elipse que tiene como ecuación general $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$
3) Encuentra la ecuación general de elipse que tiene como focos $F_2(-6,5), F_1(2,5)\ y\ \ e = \frac{2}{3}$
4) Grafica la elipse que tiene como ecuación general $4x^2 + y^2 + 16x - 6y + 21 = 0$
5) Grafica la elipse que tiene como vértices $V_1(-4,-2), V_2(6,-2)\ y\ semi\ eje\ focal\ 3$.

Soluciones.

1) $F(\pm 4,0), B(0,\pm 3), \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, 9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$
2) $C\ (0,0), V(0,\pm 3), F\left(0,\pm\sqrt{5}\right), B(\pm 2,0), longitud\ del\ ancho\ focal\ \frac{8}{3}$
3) $x^2 + 3y^2 + 4x - 30y + 40 = 0$
4) $C\ (-2,3), V_1\ (2,5), V_2(2,1), F_1\ \left(-2,3+\sqrt{3}\right), F_2\left(-2,3-\sqrt{3}\right), B_1(-1,3), B_2(-3,3)$
5) $C\ (1,-2), F_1\ (4,-2), F_2(-2,-2), B_1(1,2), B_2(1,-6)$

BIBLIOGRAFÍA Y MESOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA

3) De Oteyza E. et al. (2001). *Geometría Analítica y Trigonometría.* México. Pearson Prentice Hall, 1ª edición. Pp. 484-488.
4) De Oteyza E. et al. (2008). *Geometría Analítica y Trigonometría.* México. Pearson Prentice Hall. 2ª edición. Pp.391- 401.

MESOGRAFÍA

1) http://dibujosa.com/index.php?zaccion=print&file=19107.jpg&titulon=DIBUJO_DE_JARDINERO_SEMBRANDO_CON_LAS_MANOS_PARA_COLOREAR
2) http://www.encuentos.com/cuentos-de-arboles/un-arbol-verde-con-una-rama-azul/
3) http://www.slideshare.net/marielgao/psico-8910437/download

4) http://www.slideshare.net/gremialista/piaget-ausubel-vygostky-presentation
5) http://www.educar.org/articulos/vygotsky.asp
6) http://www.monografias.com/trabajos15/pavlov-skinner/pavlov-skinner.shtml#biogra
7) http://portal.uned.es/portal/page?_pageid=93,1023312&_dad=portal&_schema=PORT