UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

PLANTEL AZCAPOTZALCO

GUÍA

DE

MATEMÁTICAS IV

AUTORES

Ana Iveth Martínez Carmona (Coordinadora)

Mario Alberto Espinosa Ramírez(Coordinador)

Gloria Ivonne Hernández López

Rebeca Remedios Rayón Alegría

PRESENTACION.

La presente guía ha sido elaborada por algunos profesores del área de matemáticas, con la finalidad de que los estudiantes del Plantel cuenten con un material para poder preparar por cuenta propia el curso correspondiente a la asignatura de Matemáticas IV.

En este material se señalan, los aprendizajes que el estudiante debe alcanzar una vez finalizada cada unidad, cada sección de la guía está preparada de tal forma que abarque que se cubran los temas, en algunos casos de forma teórica mientras que, en otros en forma de ejemplos prácticos, pero en ambas situaciones bajo el contexto de que el estudiante pueda confirmar el aprendizaje logrado ya que al final de cada unidad se anexan autoevaluaciones de acuerdo a la información revisada. Al final se encuentran las referencias que el estudiante puede consultar para revisar y profundizar los temas que aquí se presentan.

Esperamos que este material cumpla con el principal objetivo de la guía, que es apoyar al mayor número de estudiantes en lo que concierne a la asignatura de matemáticas IV, para que puedan concluir su bachillerato.

Índice

Unidad I. Funciones Polinomiales.

Propósito:

Al finalizar, el alumno:

Habrá avanzado en el estudio de las funciones al introducir la notación funcional y la noción de dominio y rango. Relacionando la expresión algebraica de una función polinomial con su gráfica y analizará su comportamiento. Con base en la resolución de problemas y en contexto, usará las gráficas, tablas, expresión matemática para explicar los procesos involucrados.

Aprendizajes.

Con relación a los conocimientos y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas.

- Explora diferentes relaciones, reconociendo las condiciones necesarias para determinar si una relación es función, la simboliza y distingue el dominio y el rango.
- Comprende el significado de la notación funcional, la utiliza para representar y evaluar funciones polinomiales. Usa la notación de intervalos para representar dominio y rango de una función.
- Aplica la división sintética, el teorema del residuo, el teorema del factor, su recíproco para determinar los ceros de $f(x)$ y su gráfica.
- Construye una función polinomial a partir de las raíces de su ecuación y bosqueja su gráfica y a partir de una función polinomial calcula los ceros y realizará su gráfica.
- Reconoce a las funciones como modelos de variación de fenómenos naturales, económicos y sociales.

Temática:

- Relación.
- Noción generalizada de función.
- Situaciones que se modelan con función polinomial.
  - Relación entre dos variables.
  - Regla de correspondencia.
  - Dominio y Rango.
- Notación funcional.

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x^1 + a_0$$

- Intervalos.
- División Sintética, teorema del residuo, teorema del factor y su recíproco.
- Ceros de la función y raíces reales y complejas de la ecuación.
- Raíces de multiplicidad impar o par, para observar el comportamiento gráfico.
- Graficación de funciones.
- Cálculo de ceros y graficación de funciones
- Problemas de aplicación.

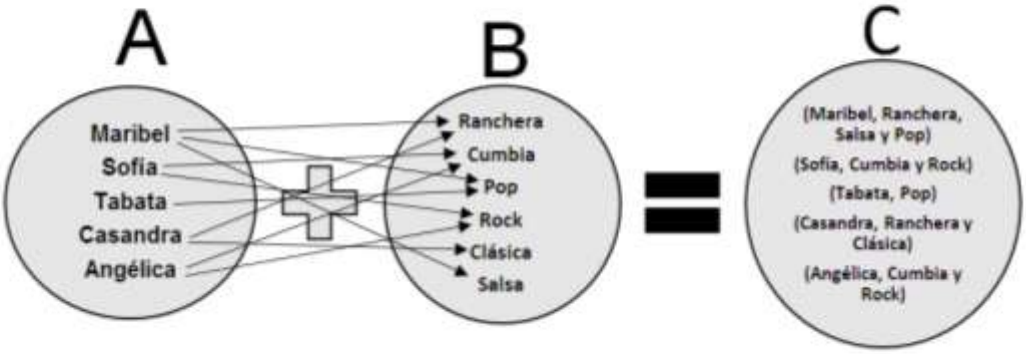
1.1 Relación.

Una relación es el **vínculo o correspondencia** existente entre los elementos de dos conjuntos, a la vez, un conjunto es la agrupación de ciertos elementos con características en común. La relación se caracteriza porque a cada elemento del primer conjunto le corresponde por lo menos un elemento del segundo conjunto.

Por ejemplo:

El nombre de una persona y su gusto por un género de música en particular, un primer conjunto puede estar formado por el nombre de diferentes personas, mientras que el segundo conjunto está formado por los géneros musicales en particular.

Esta situación indica que la relación no es un objeto sino un conjunto, que para que exista debemos conocer todos los elementos que conforman el vínculo, entre los conjuntos; <<que podemos identificar al primero como A y al segundo B>>, dicha vinculación da origen a otro conjunto formado por la lista de todas las parejas vinculadas que se pueden formar <<llamada C>>. Una forma de poder observar estas situaciones sería mediante el siguiente diagrama:



Este diagrama presenta la vinculación entre los elementos de los conjuntos, a través de señalizaciones directas <<por medio de las flechas>> y de forma más ordenada <<como pares directos entre la persona y el generó que más le agrada>>.

En ambas situaciones podemos apreciar que cada individuo puede tener por lo menos una preferencia, incluso hay una persona que tiene preferencia por tres géneros diferentes.

Una situación similar podría darse en la siguiente situación: una vendedora de faldas y blusas quiere hacer lucir sus productos y decide organizarlos en todas las formas posibles que puede, ella cuenta con tres blusas de color rosa, azul y blanco; también con faldas de color verde, amarilla, negra y azul. Los pares de prendas que logra formar quedan de la siguiente forma:

Falda verde y Blusa roja	Falda amarilla y Blusa roja
Falda verde y Blusa azul	Falda amarilla y Blusa azul
Falda verde y Blusa blanca	Falda amarilla y Blusa blanca

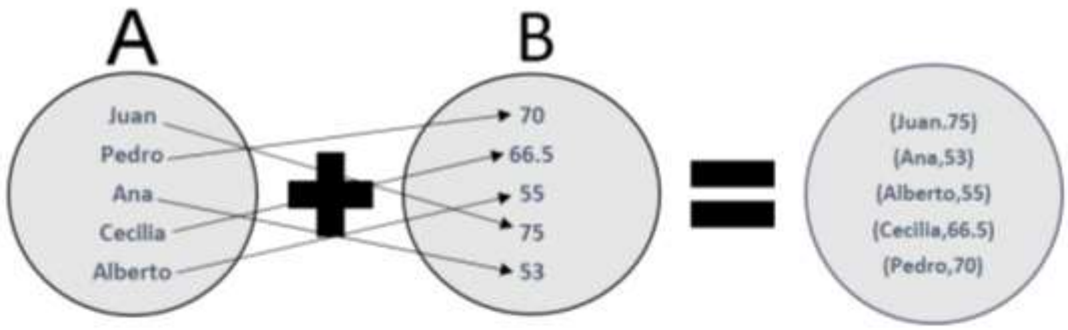
Si te fijas, aunque la presentación de esta información es diferente de la que se manejó en el ejemplo anterior, hay algo constante, la vinculación de los elementos de un conjunto <<Faldas>> con otro conjunto <<Blusas>> que dan pie a un conjunto más grande donde para cada elemento del conjunto *Faldas* le corresponde más de un elemento del conjunto *Blusas*.

Estas situaciones nos llevan la siguiente conclusión:

Una relación es la correspondencia de los elementos de dos conjuntos A y B, donde a cada elemento del conjunto A le corresponde por lo menos uno o más elementos del conjunto B.

1.2 Noción generalizada de Función.

Una situación similar a las anteriores podría ser en la cual tenemos un conjunto (A) formado por estudiantes y en otro conjunto tenemos su masa (B) en kilogramos. La forma de relacionarlos sería asignarle a cada estudiante su peso correspondiente. Tenemos entonces, una relación de A en B, es decir, cada individuo con su respectiva masa, esto es:



Podríamos asegurar que sucede lo mismo que en los casos anteriores, referentes a la relación, pero si pones atención deberás notar que la vinculación es de uno a uno entre los elementos de los conjuntos.

Esto no es casualidad, para comprobarlo podemos citar la **vinculación** existente entre los nombres en un directorio telefónico y su número telefónico. La relación es de uno a uno, ya que dos personas diferentes no pueden tener el mismo número telefónico.

De acuerdo a estos ejemplos podemos dar una aproximación a lo que sería una función, de la siguiente forma:

Una función, es una relación, cuya correspondencia de elementos entre dos conjuntos A y B, se caracteriza porque a cada elemento del conjunto A le corresponde un único elemento del conjunto B.

En cada una de las notaciones anteriores se marca la vinculación o correspondencia entre los elementos de un conjunto con otro, este vínculo recibe el nombre de **regla de correspondencia.**

La **regla de correspondencia** indica el vínculo entre los elementos de dos conjuntos, de esta forma podemos saber qué es lo que sucedió para que los elementos se vinculen se forma específica.

Por ejemplo: un profesor cita a sus alumnos para darles a conocer su calificación final del curso, existen dos conjuntos de elementos: los alumnos <<variable independiente>>, y la calificación final <<variable dependiente>> la regla de correspondencia <<el vínculo>> es el proceso que tuvo que realizar el profesor para poder establecer la calificación final de cada alumno, es decir, promediar las calificaciones de cada uno. La regla de correspondencia es el promedio del alumno, esta palabra <<aunque simple>> implica realizar una sumatoria de las calificaciones individuales y posteriormente dividir la suma entre el número de calificaciones que se están tomando en cuenta.

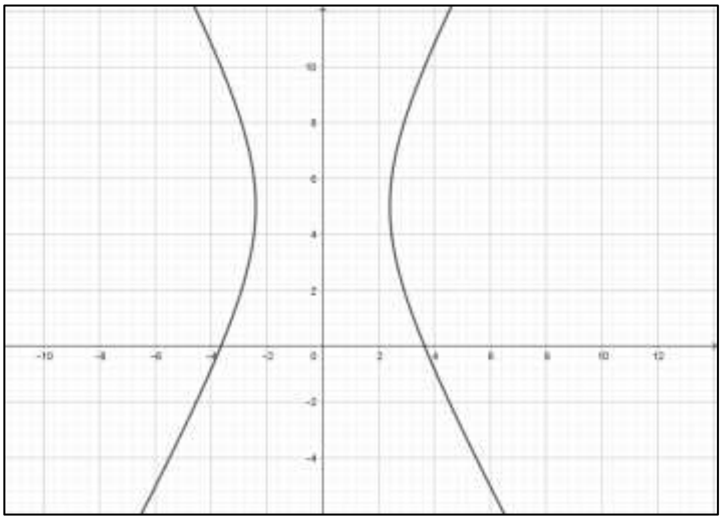
Ejercicio 1.1

Para cada una de las siguientes correspondencias, escribe dentro del paréntesis una (R) si consideras que es una relación o una (F) si consideras que es una función.

1. (   ) La correspondencia entre los nombres de alumnos con la lista del grupo de un profesor.
2. (   ) La relación de los días de la semana con un mes del año.
3. (   ) La relación entre un número positivo y su raíz cuadrada.
4. (   ) La correspondencia entre un estudiante y el asiento que ocupa dentro de un salón de clases.
5. (   ) La correspondencia entre varios países y el continente al cual pertenecen.
6. (   ) La relación entre el costo que paga la gente por la cantidad de tortillas que compra.

Gráficamente existen diferencias entre una relación y una función, vamos a especificar las nociones que aprendiste, puedes utilizarlas para diferenciar entre las gráficas generadas por funciones o relaciones.

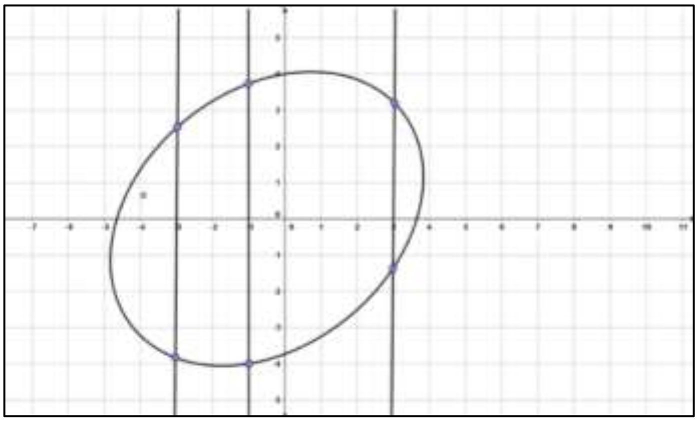
Por ejemplo, ¿puedes decir, si la siguiente gráfica pertenece a una relación o a una función?



gráfica 1. 1

Una forma sencilla de diferenciar la gráfica de una relación de la de una función, es utilizando ***la prueba de la recta vertical***. Esta prueba se basa literalmente en trazar una o más rectas verticales que pasen a través de la gráfica, si la recta vertical corta en más de un punto a la gráfica, entonces la gráfica pertenece a una relación.

En las siguientes gráficas se observa una serie de rectas verticales que las cortan en más de una ocasión, por lo tanto, pertenecen a una relación <<porque si te fijas la gráfica se lee, como que para cada valor de x le corresponde uno más elementos de y>>



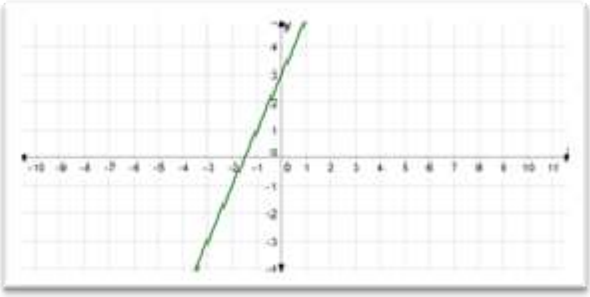
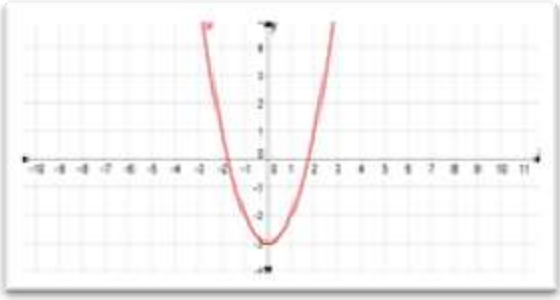
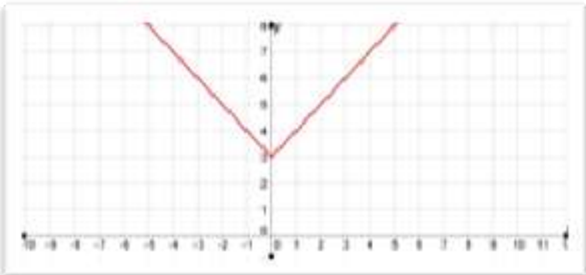
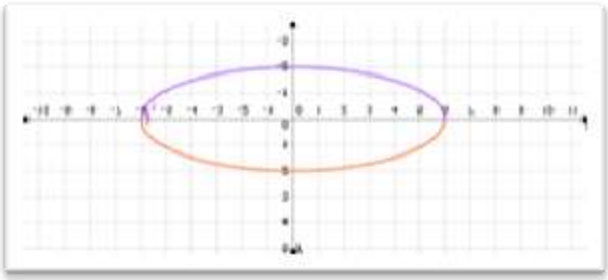
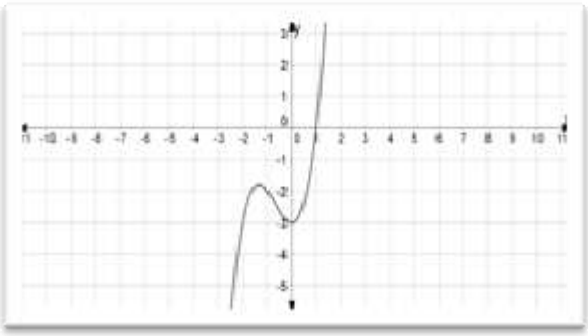
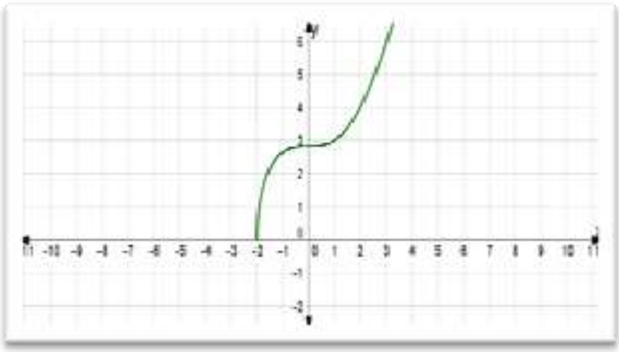
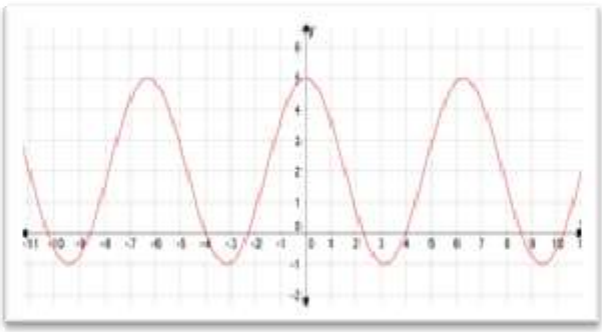
gráfica 1. 2

Por lo tanto, si la recta vertical corta en todo momento <<sin importar dónde se trace>> una sola vez a la gráfica, ésta pertenece a una función.

Nota: es necesario señalar que en una función a diferentes elementos del conjunto A le pueden corresponder un mismo elemento del conjunto B, como en el caso de la función cuadrática.

Ejercicio 1.2

Haciendo uso de la prueba de la recta vertical, determina cuáles de las siguientes graficas pertenecen a una función y cuales a una relación.

1.- 	**2.-** 
3.- 	**4.-** 
5 	**6** 
 **7**	

1.3 Notación funcional.

Hay varias formas que se utilizan para saber el comportamiento de una función: puede ser de manera verbal mediante una descripción; algebraica donde utilizamos una fórmula; numérica cuando hacemos una tabla que muestra el conjunto de parejas ordenadas y la visual cuando realizamos la gráfica.

Drichelet (1805-1859). Estableció que si dos variables x y y están relacionadas de modo que para cada valor de x le corresponde exactamente un valor de y, entonces se dice que y es una función de x. Llamó a x variable independiente, es decir, a la que le asignas los valores a voluntad y a y la variable dependiente, es decir, la variable cuyos valores dependen de los valores asignados a x. Llamó a los valores que sustituyen a x **dominio** de la función y a los valores correspondientes de y como el **rango** de la función.

Definición de función:

Sean A y B dos conjuntos, y f una regla que asigna a cada elemento x del conjunto A un único elemento en B, que se representa por $f(x)$, donde:

El conjunto A se denomina dominio de la función $A = Dominio\ f$

En el conjunto B hay un subconjunto que consta de todos los valores posibles $f(x)$ se le conoce como rango de la función $B = Rango\ f$

De acuerdo a lo anterior se procede a establecer la notación que convencionalmente se usa para representar una función a saber:

Denotamos una función *f* de un conjunto *A* en un conjunto *B* de la siguiente manera:

$$f: A \rightarrow B; \qquad x \mapsto f(x)$$

Entonces $f: A \rightarrow B$ (se lee << *f* es una función de A en B>>)

La regla de correspondencia se implementará por medio de una expresión algebraica y utilizaremos la notación: $f(x)$ (se lee << f de x>>)

Una **función polinomial** es una función cuya regla está dada por un polinomio en una variable.

El grado de una función polinomial es el grado del polinomio en una variable, es decir, la potencia más alta que aparece de x.

Así que una función *f* está definida por:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

Donde n es un número entero positivo; $a_n, a_{n-1}, a_2, a_1, a_0$ se denominan coeficientes y son números reales.

Esta es una notación funcional en su forma completa, la cual también se representa como:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Una función puede expresarse con cualquier letra ya sea mayúscula o minúscula.

Por ejemplo:

$$g(x) = 8x^2 - 3x + 2$$

$$h(x) = 4x^3 + x^2 - 3x + 5$$

$$m(x) = x^3 + 5x^2 + 2x + 9$$

$$k(x) = 3x^4 + 8x^3 - x^2 - 3x - 6$$

$$V(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x$$

1.4 Intervalos.

Un intervalo es un subconjunto conexo de la recta real R. Es decir, un conjunto dentro de dos números reales diferentes de la recta real. Así que esta forma la utilizaremos para decir el dominio y rango de una función.

Dados dos números reales a y b, se puede establecer cuál es el mayor, así que para escribir el resultado de tal comparación se utiliza:

Intervalo abierto:

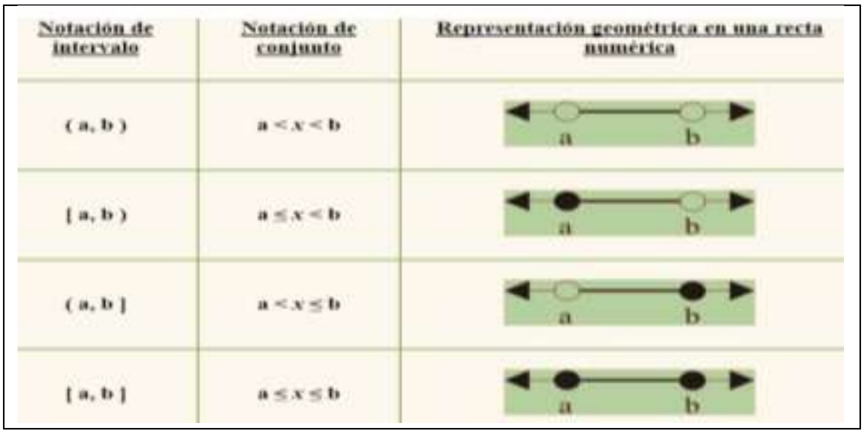
No incluye los extremos, (a, b)

Intervalo cerrado:

Incluye los extremos, [a, b]

Si incluye únicamente uno de los extremos,
(a, b], [a, b)

Y para todo valor real, **(- ∞, ∞)**

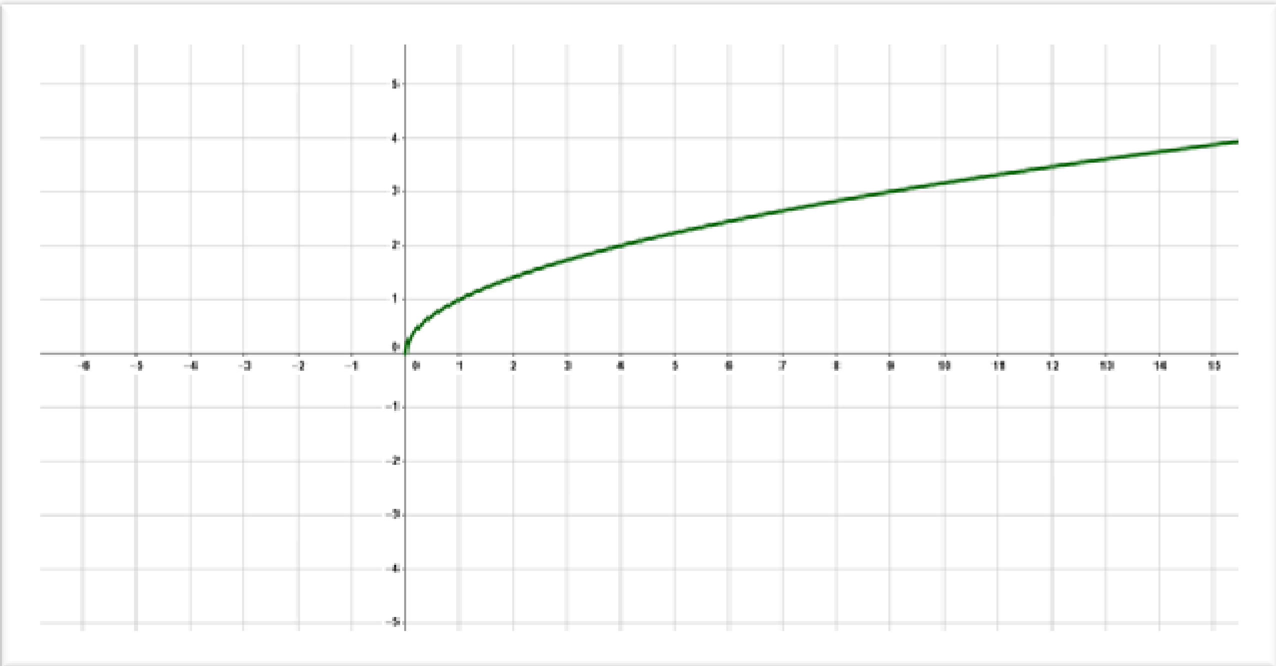


Notación de intervalo	Notación de conjunto	Representación geométrica en una recta numérica
(a, b)	a < x < b	a b
[a, b)	a ≤ x < b	a b
(a, b]	a < x ≤ b	a b
[a, b]	a ≤ x ≤ b	a b

En los siguientes ejemplos utilizaremos gráficas para ver el comportamiento de una función y determinar el dominio (D) y rango (R).

Ejemplo 1. $f(x) = \sqrt{x}$ se sustituyen valores de x, para obtener un número suficiente de puntos, hasta notar cierto patrón.

x	0	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$f(x)$	0	1	1.2247	1.4142	1.5811	1.732	1.8708	2



gráfica 1. 3

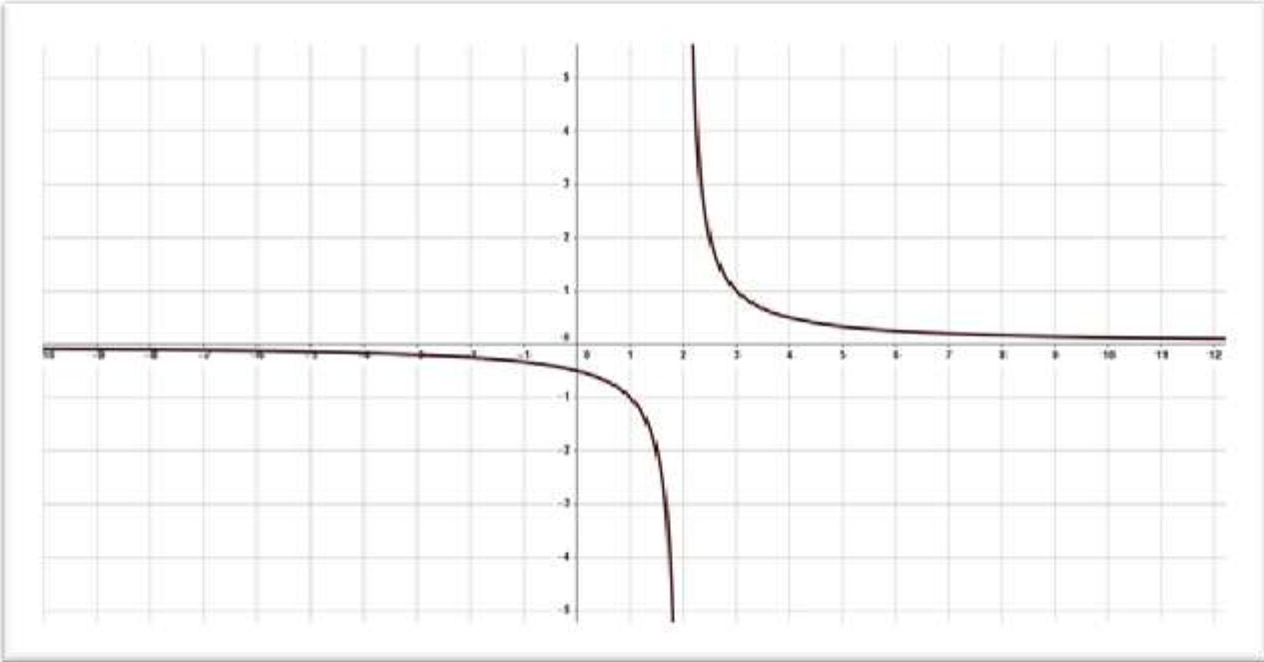
$$f(x) = \sqrt{x}$$

Observando la gráfica de $f(x)$ el dominio es el conjunto de los números reales no negativos, es decir, D: [0, ∞), debido a que $\sqrt{x}$ es un número real si y sólo si x es mayor o igual que cero.

Y el rango de $f(x)$ es: R: [0, ∞), todos los valores de f de x dan reales positivos.

Ejemplo 2. $g(x) = \frac{1}{x-2}$ se sustituyen valores de x, para obtener un número suficiente de puntos, hasta notar cierto patrón.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	3.5	5
$g(x)$	-0.2	-0.25	-0.333	-0.5	-1	No definida	1	0.666	0.333



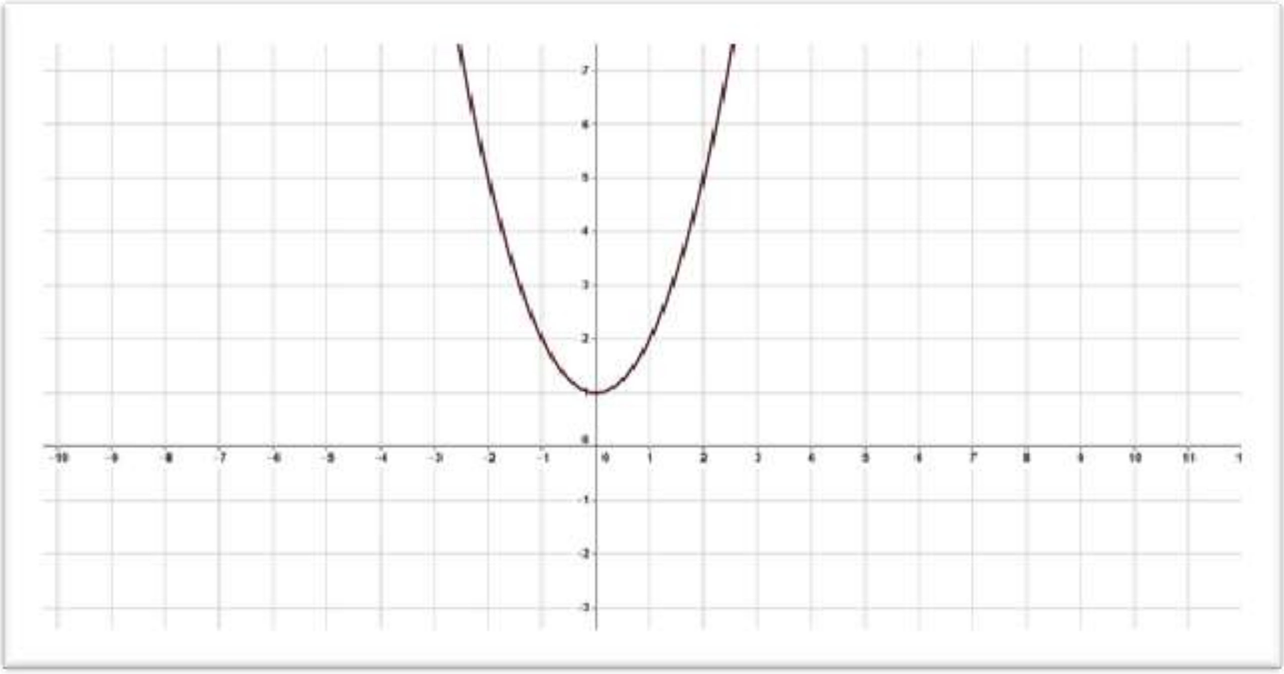
gráfica 1. 4

$$g(x) = \frac{1}{x-2}$$

Observando la gráfica de $g(x)$ el dominio es el conjunto de todos los números reales excepto el 2 para evitar la división entre cero, es decir, D: (-∞, ∞) - {2}. Y el rango de $g(x)$ es: R: (-∞, ∞) - {0}, se observa que la gráfica no pasa por el eje de las x.

Ejemplo 3. $h(x) = x^2 + 1$, al sustituir un valor del Dominio se obtiene un valor comprendido en el Rango.

x	-4	-3	-2	0	0.5	1	1.5
$h(x)$	17	10	5	1	1.25	2	3.25



gráfica 1. 5

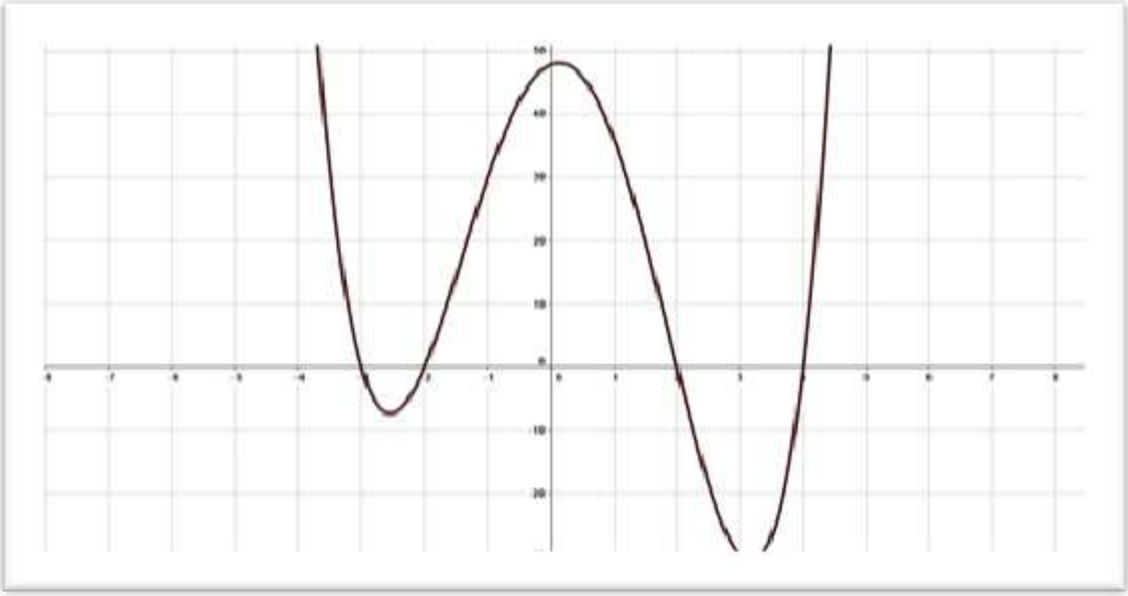
$$h(x) = x^2 + 1$$

Como se puede observar el dominio de $h(x)$ es D: (-∞, ∞), recuerda que en la tabla sólo dimos valores de x suficientes para ver su comportamiento.

El rango es R: [1, ∞)

Ejemplo 4. $m(x) = x^4 - x^3 - 16x^2 + 4x + 48$ al asignar valores a la variable independiente obtenemos los valores de $m(x)$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$m(x)$	96	0	0	30	48	36	0	-30	0



gráfica 1. 6

$$m(x) = x^4 - x^3 - 16x^2 + 4x + 48$$

En la función $m(x)$ tenemos un valor mínimo donde denotamos como a un valor a tenemos un $m(a)$, con esto podemos decir que el rango es:

R: [$m(a)$, ∞) y el D: (-∞, ∞).

Ejercicio 1.3

En los siguientes incisos determina el dominio y rango de las funciones:

1.- $f(x) = 2x^3 - 2$ 2.- $j(x) = -2x^2 + 8x - 5$

3.- $r(x) = 3x^4$ 4.- $m(x) = -2x^4$

5.- $h(x) = x^4 - 2x^2 - 8$ 6.- $g(x) = 4x^3 - 9x^2 - 21x + 26$

Recuerda que la gráfica de una función es de gran ayuda para observar su comportamiento.

1.5 Análisis y Graficación de una Función Polinomial.

En este apartado vamos a realizar el análisis de una función polinomial, es decir, determinar las raíces del polinomio y su naturaleza (reales o imaginarias); la intersección de la curva con las ordenadas o eje vertical, sus intervalos de crecimiento; multiplicidad de sus raíces; dominio y rango y culminar en la gráfica de la función.

Teorema de Ceros Racionales.

Si la función polinomial $\boldsymbol{f(x)} = \mathbf{a}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x^n} + \mathbf{a}_{\boldsymbol{n-1}}\boldsymbol{x^{n-1}} + \cdots + \mathbf{ax} + \mathbf{a_0}$ tiene coeficientes enteros, entonces todo cero racional de P es de la forma $\frac{p}{q}$ donde p es un factor del coeficiente constante a_0 y q es un factor del coeficiente principal a_n

$$\frac{p}{q} = \frac{a_0}{a_n} = lista\ de\ posibles\ ceros$$

Los valores obtenidos forman una lista de posibles raíces para la función que estamos analizando, como puedes observar está formada por 16 valores (8 positivos y 8 negativos). Ahora hay que determinar cuál de los valores en la lista realmente es una raíz de la función para ello es necesario llevar a cabo el teorema del factor y utilizar como herramienta a la división sintética.

El objetivo de conocer las raíces de un polinomio es el de poder simplificarlo (factorizarlo) a su forma más simple, para que pueda ser analizado de forma sencilla a partir de los elementos (factores) que lo componen. Para poder obtener la factorización de dicho polinomio es necesario conocer los factores que lo dividen de forma exacta, es decir, los factores cuya división proporcionan un residuo de valor cero.

Teorema del residuo.

Sea *f* una función polinomial. Si $f(x)$ es dividida entre $(x - c)$, entonces el residuo es $f(c)$.

Una consecuencia del teorema del residuo es el teorema del factor.

Teorema del factor.

Sea *f* una función polinomial. Entonces $x - c$ es un factor de *f(x)* si, y sólo si $f(c) = 0$.

El teorema del factor, se puede expresar como dos enunciados separados:

1. **Si $\boldsymbol{f(c) = 0}$,** entonces x-c es un factor de $f(x)$.
2. **Si $\boldsymbol{x - c}$ es un factor de $\boldsymbol{f(x)}$, entonces $\boldsymbol{f(c) = 0}$.**

División de polinomios.

Para lograr simplificar funciones polinomiales de orden superior es necesario determinar los factores de dicha función, es decir, es necesario determinar los factores que dividen a la función de forma exacta. La división sirve como herramienta para llevar a cabo la información obtenida mediante el teorema del residuo y el teorema del factor. El tipo de división que se planea realizar es la división sintética, cuyo proceso se presenta más adelante.

Para que resulten un poca más claros estos teoremas vamos a aplicarlos dentro de los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

$f(x) = 3x^5 - 14x^4 - 14x^3 + 36x^2 + 43x + 10$

Teorema de Ceros Racionales.

$$\frac{p}{q} = \frac{a_0}{a_n} = \frac{10}{3} = \frac{1, 2, 5, 10}{1, 3}$$

$$= \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{5}{1}, \frac{5}{3}, \frac{10}{1}, \frac{10}{3}$$

Posibles ceros $= \pm\left[\mathbf{1, 2, 5, 10}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}\right]$

Teorema del residuo.

$f(1) = 3(1)^5 - 14(1)^4 - 14(1)^3 + 36(1)^2 + 43(1) + 10$

$f(1) = 64$; Como el resultado final (el residuo) no es cero significa que 1 no es raíz del polinomio.

1	3	-14	-14	36	43	10
		3	-11	-25	11	54
	3	-11	-25	11	54	**64**

$f(2) = 3(2)^5 - 14(2)^4 - 14(2)^3 + 36(2)^2 + 43(2) + 10$, ahora para: $f(2) = 0$;

Entonces $x = 2$ es una raíz del polinomio $y\,(x-2) = 0$ es un factor del mismo, de acuerdo a los teoremas del factor y del residuo. Ahora vamos a realizar la simplificación del polinomio a través de la división sintética.

2	3	-14	-14	36	43	10
		6	-16	-60	-48	-10
	3	-8	-30	-24	-5	**0**

Proceso para la división.

1. Se toman los coeficientes de la función, indicando que van a ser divididos por el valor de la raíz obtenida (x = 2) y se baja directo el valor del coeficiente principal (3).
2. Se realiza la división, multiplicamos el valor de la raíz por el 3 que bajamos y el resultado lo colocamos bajo el siguiente valor para posteriormente sumarlos de forma vertical.
3. Se vuelve a multiplicar de forma cruzada ahora el 2 por el -8 y el resultado se ubica bajo el -16 para sumarlos de forma vertical, hasta terminar.

Tras haber realizado la división se comprueba que el residuo es cero y la función ha sido factorizada la forma;

$$f(x) = (3x^4 - 8x^3 - 30x^2 - 24x - 5)(x-2)$$

$$f(x) = (\text{cociente}) \quad (\text{factor } 1)$$

Se repite el proceso desde la evaluación del teorema del residuo, hasta factorizar por completo la función.

Teorema del residuo

Si: $f(5) = 0$ entonces, $x = 5$ es una raíz del polinomio.

Teorema del factor

Si: $x = 5$ es una raíz del polinomio entonces, $(x-5) = 0$ es un factor del polinomio.

División sintética

5	3	-8	-30	-24	-5
		15	35	25	5
	3	7	5	1	**0**

Tras haber realizado la división se comprueba que el residuo es cero y la función ha sido factorizada la forma;

$$f(x) = (3x^3 + 7x^2 + 5x + 1)(x-2)(x-5)$$

$$f(x) = (\text{cociente}) \quad (\text{factor } 1) \;\; (\text{factor } 2)$$

Si: $f(-1) = 0$ entonces, x = 1 es una raíz del polinomio.

Si: x = 1 es una raíz del polinomio entonces, (x + 1) = 0 es un factor del polinomio.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & 7 & 5 & 1 \\ & & -3 & -4 & -1 \\ \hline & 3 & 4 & 1 & \mathbf{0} \end{array}$$

$$f(x) = (3x^2 + 4x + 1)(x - 2)(x - 5)(x + 1)$$

$$f(x) = (\text{cociente}) \quad (\text{factor 1}) \ \ (\text{factor 2}) \ (\text{factor 3})$$

Si: $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$ entonces, x = $-\frac{1}{3}$ es una raíz del polinomio.

Si: x = $-\frac{1}{3}$ es una raíz del polinomio entonces, (x $\frac{1}{3}$) = 0 es un factor del polinomio.

$$\begin{array}{r|rrr} -\frac{1}{3} & 3 & 4 & 1 \\ & & -1 & -1 \\ \hline & 3 & 3 & \mathbf{0} \end{array}$$

$$f(x) = (3x + 3)(x - 2)(x - 5)(x + 1)(x + \frac{1}{3})$$

$$f(x) = (\text{cociente}) \quad (\text{factor 1}) \ \ (\text{factor 2})(\text{factor 3}) \ (\text{factor 4})$$

$$f(x) = 3(x + 1)(x - 2)(x - 5)(x + 1)(x + \frac{1}{3})$$

$$f(x) = 3(\text{factor 5}) \ (\text{factor 1}) \ \ (\text{factor 2})(\text{factor 3}) \ (\text{factor 4})$$

Función factorizada:

$$\boldsymbol{f(x) = 3(x + 1)(x - 2)(x - 5)(x + 1)(x + \frac{1}{3})}$$

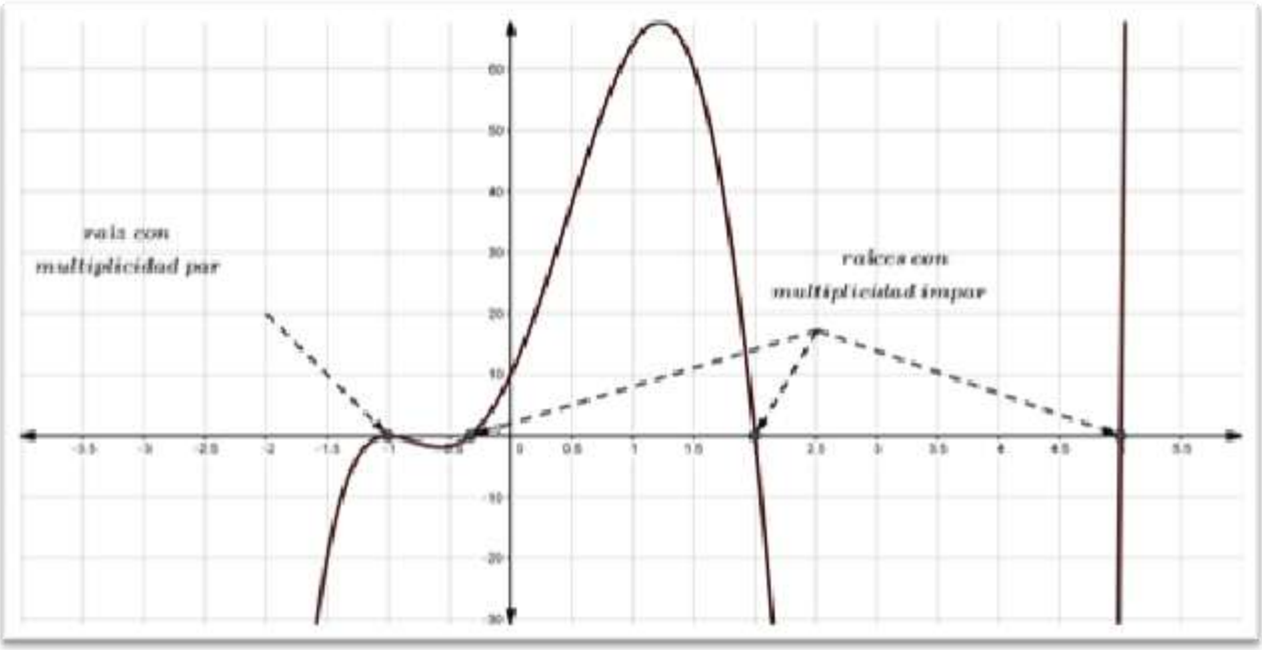
Raíces reales	$x_1 = 2$	$x_2 = 5$	$x_3 = -1$	$x_4 = -\boldsymbol{\frac{1}{3}}$	$x_5 = -1$
Multiplicidad	**1**	**1**	**2**	**1**	**2**

A las raíces del polinomio le interpretamos el concepto de **multiplicidad**.

Multiplicidad de una raíz: indica el número de veces que aparece un valor como solución o raíz del polinomio. La multiplicidad puede ser par o impar.

Multiplicidad impar (1, 3, 5, 7…): la curva corta al eje de las abscisas u horizontal.

Multiplicidad par (2, 4, 6, 8…): la curva no corta, toca y "rebota" quedándose del mismo lado de las abscisas.



gráfica 1. 7

Ejemplo 2.

$g(x) = -x^4 + 13x^2 - 36$

Teorema de Ceros Racionales.

$$\frac{p}{q} = \frac{a_0}{a_n} = \frac{36}{10} = \frac{1,2,3,4,6,9,12,18,36}{1,2,5,10}$$

Posibles ceros $= \pm\left[1,2,3,4,6,9,12,18,36,\frac{2}{5},\frac{1}{5},\frac{3}{2},\frac{3}{5},\frac{3}{10},\frac{4}{5},\frac{2}{5},\frac{6}{5},\frac{9}{2},\frac{9}{5},\frac{9}{10},\frac{12}{5},\frac{18}{5},\frac{36}{5}\right]$

Teorema del residuo

Si: $f(2) = 0$ entonces, x = 2 es una raíz del polinomio.

Teorema del factor

Si: x = 2 es una raíz del polinomio entonces, (x-2) = 0 es un factor del polinomio.

División sintética

2	-1	0	13	0	-36
		-2	-4	18	36
	-1	-2	9	18	**0**

$$g(x) = (-x^3 - 2x^2 + 9x + 18)(x - 2)$$

Teorema del residuo

Si: $f(4) = 0$ entonces, x = 3 es una raíz del polinomio.

Teorema del factor

Si: x = 3 es una raíz del polinomio entonces, (x-3) = 0 es un factor del polinomio.

División sintética

3	-1	-2	9	18
		-3	-15	-18
	-1	-5	-6	**0**

$$g(x) = (-x^2 - 5x - 6)(x - 2)(x - 3)$$

Teorema del residuo

Si: $f(-2) = 0$ entonces, x = -2 es una raíz del polinomio.

Teorema del factor

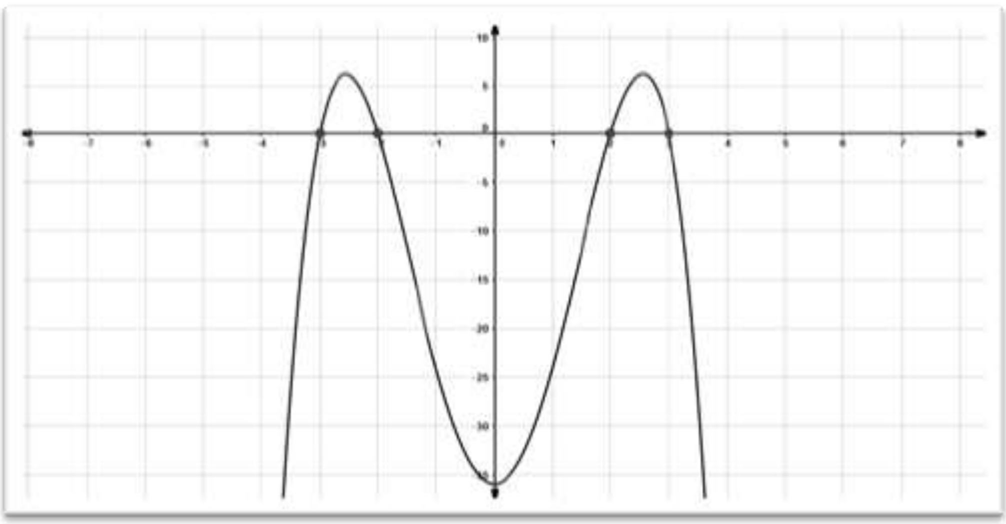
Si: x = -2 es una raíz del polinomio entonces, $(x + 2) = 0$ es un factor del polinomio.

-2	-1	-5	-6
		2	6
	-1	-3	**0**

$$g(x) = (-x - 3)(x - 2)(x - 3)(x + 2)$$

Se factoriza el signo $g(x) = -(x + 3)(x - 2)(x - 3)(x + 2)$

Raíces reales	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$	$x_3 = -2$	$x_4 = -\mathbf{3}$
Multiplicidad	**1**	**1**	**1**	**1**



gráfica 1. 8

Raíces con multiplicidad impar

Ejemplo 3.

$h_{(x)} = 4x^3 - 7x + 3$

Teorema de Ceros Racionales.

$$\frac{p}{q} = \frac{a_0}{a_n} = \frac{3}{4} = \frac{1,3}{1,2,4}$$

Posibles ceros $= \pm\left[1,3,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$

Teorema del residuo

Si: $f(1) = 0$ entonces, x = 1 es una raíz del polinomio.

Teorema del factor

Si: x = 1 es una raíz del polinomio entonces, (x-1) = 0 es un factor del polinomio.

División sintética

1	4	0	-7	3
		4	4	-3
	4	4	-3	**0**

$$h(x) = (4x^2 + 4x - 3)(x - 1)$$

Teorema del residuo

Si: $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ entonces, x = $\frac{1}{2}$ es una raíz del polinomio.

Teorema del factor

Si: x = $\frac{1}{2}$ es una raíz del polinomio entonces, (x - $\frac{1}{2}$) = 0 es un factor del polinomio.

División sintética

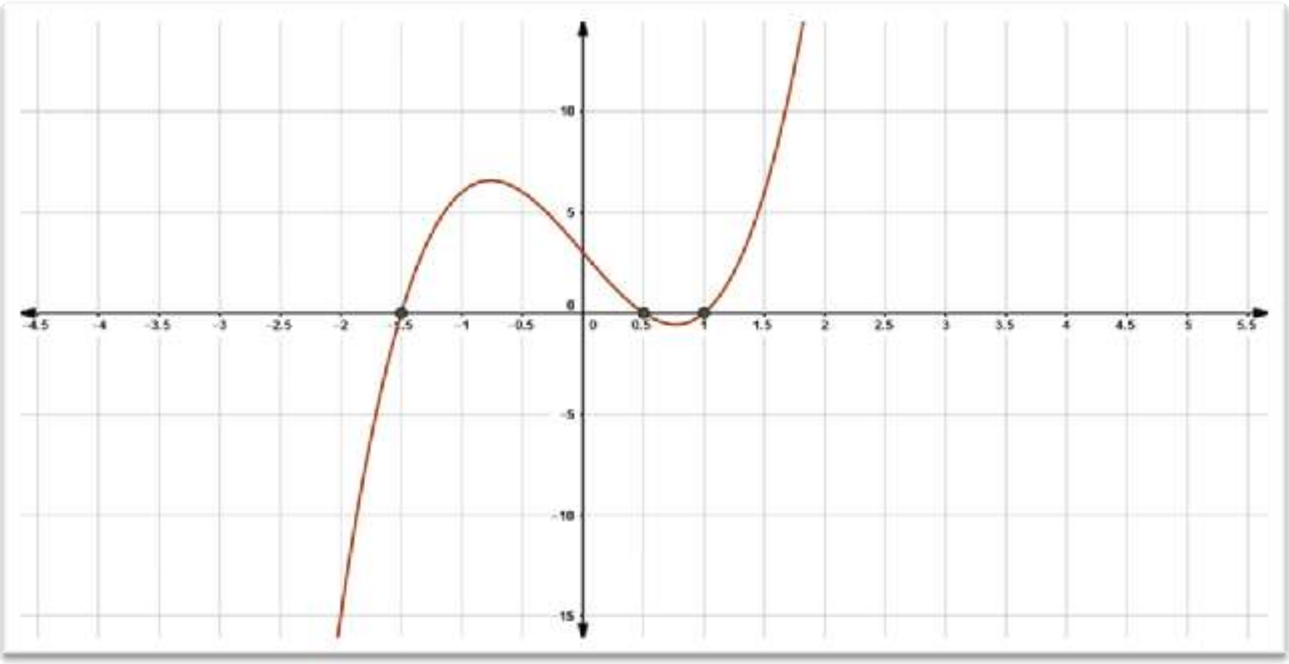
$\frac{1}{2}$	4	4	-3
		2	3
	4	6	**0**

$h(x) = (4x - 6)(x - 1)(x - \frac{1}{2})$

Si: $(4x - 6) = 0$ es un factor del polinomio entonces, x = $\frac{2}{3}$ es una raíz del polinomio

$$h(x) = 4(x - \frac{2}{3})(x - 1)(x - \frac{1}{2})$$

Raíces reales	$x_1 = 1$	$x_2 = \frac{2}{3}$	$x_3 = \frac{2}{3}$
Multiplicidad	**1**	**1**	**1**



gráfica 1. 9

Raíces con multiplicidad impar

Ejemplo 4.

$i_{(x)} = x^4 - 13x^2 + 36$

Teorema de Ceros Racionales.

Posibles ceros $= \pm[1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36]$

Teorema del residuo

Si: $i(3) = 0$ entonces, x = 3 es una raíz del polinomio.

Teorema del factor

Si: x = 3 es una raíz del polinomio entonces, (x-3) = 0 es un factor del polinomio.

División sintética

3	1	0	-13	0	36
		3	9	-12	-36
	1	3	-4	-12	**0**

$h(x) = (x^3 + 3x^2 - 4x - 12)(x - 3)$

Teorema del residuo

Si: $i(2) = 0$ entonces, x = 2 es una raíz del polinomio.

Teorema del factor

Si: x = 2 es una raíz del polinomio entonces, (x - 2) = 0 es un factor del polinomio.

División sintética

2	1	3	-4	-12
		2	10	12
	1	5	6	**0**

$i(x) = (x^2 + 5x + 6)(x - 2)(x - 3)$

Teorema del residuo

Si: $i(-2) = 0$ entonces, x = -2 es una raíz del polinomio.

Teorema del factor

Si: x = 2 es una raíz del polinomio entonces, (x + 2) = 0 es un factor del polinomio.

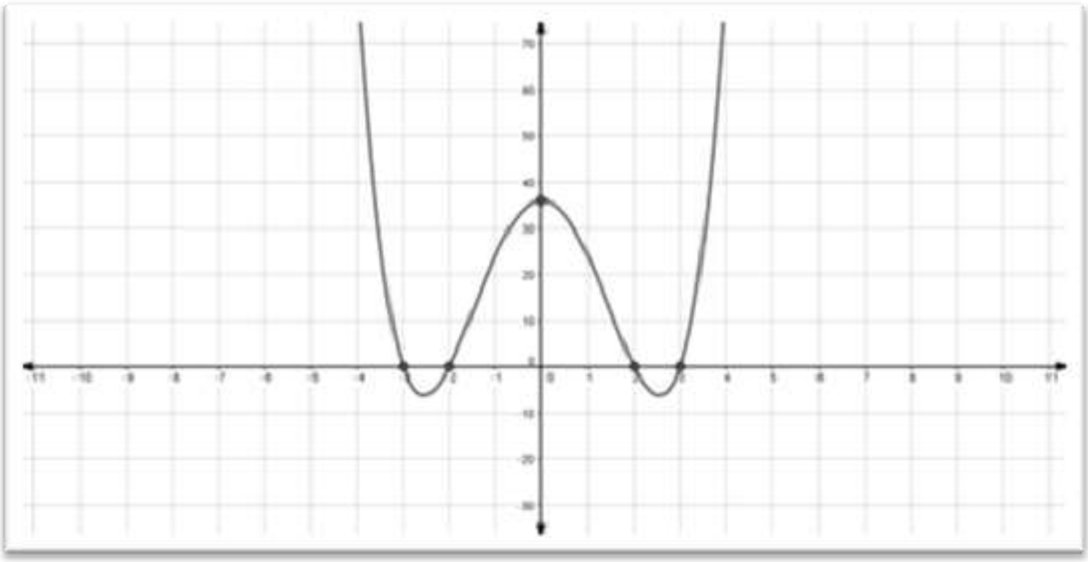
División sintética

-2	1	5	6
		-2	-6
	1	3	**0**

Si: $(x + 3) = 0$ es un factor del polinomio entonces, x = -3 es una raíz del polinomio

$i(x) = (x + 3)(x - 3)(x - 2)(x + 2)$

Raíces reales	$x_1 = -3$	$x_2 = -2$	$x_3 = 2$	$x_4 = 3$
Multiplicidad	1	1	1	1



gráfica 1. 10

Ejemplo 5.

$m(x) = x^4 - 4x^2$

Teorema de Ceros Racionales.

$$\frac{p}{q} = \frac{a_0}{a_n} = \frac{0}{1} = 0$$

Posibles ceros $= 0$ sólo existe una raíz posible así que evaluamos para x = 0.

Teorema del residuo

Si: $f(0) = 0$ entonces, x = 0 es una raíz del polinomio.

Teorema del factor

Si: x = 0 es una raíz del polinomio entonces, (x) = 0 es un factor del polinomio.

División sintética

0	1	0	-4	0	0
		0	0	0	0
	1	0	-4	0	**0**

$$m(x) = (x^3 - 4x)(x)$$

Teorema de Ceros Racionales.

$$\frac{p}{q} = \frac{a_0}{a_n} = \frac{0}{1} = 0$$

Posibles ceros $= 0$ sólo existe una raíz posible así que evaluamos para x = 0.

Teorema del residuo

Si: $f(0) = 0$ entonces, x = 0 es una raíz del polinomio.

Teorema del factor

Si: x = 0 es una raíz del polinomio entonces, (x) = 0 es un factor del polinomio.

División sintética

$$\begin{array}{r|rrrr} 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

$$m(x) = (x^2 - 4)(x)(x)$$

Teorema de Ceros Racionales.

$$\frac{p}{q} = \frac{a_0}{a_n} = \frac{4}{1} = \frac{1,2,4}{1} =$$

Posibles ceros $= \pm[1,2,4]$

Teorema del residuo

Si: $f(2) = 0$ entonces, x = 2 es una raíz del polinomio.

Teorema del factor

Si: x = 2 es una raíz del polinomio entonces, (x-2) = 0 es un factor del polinomio.

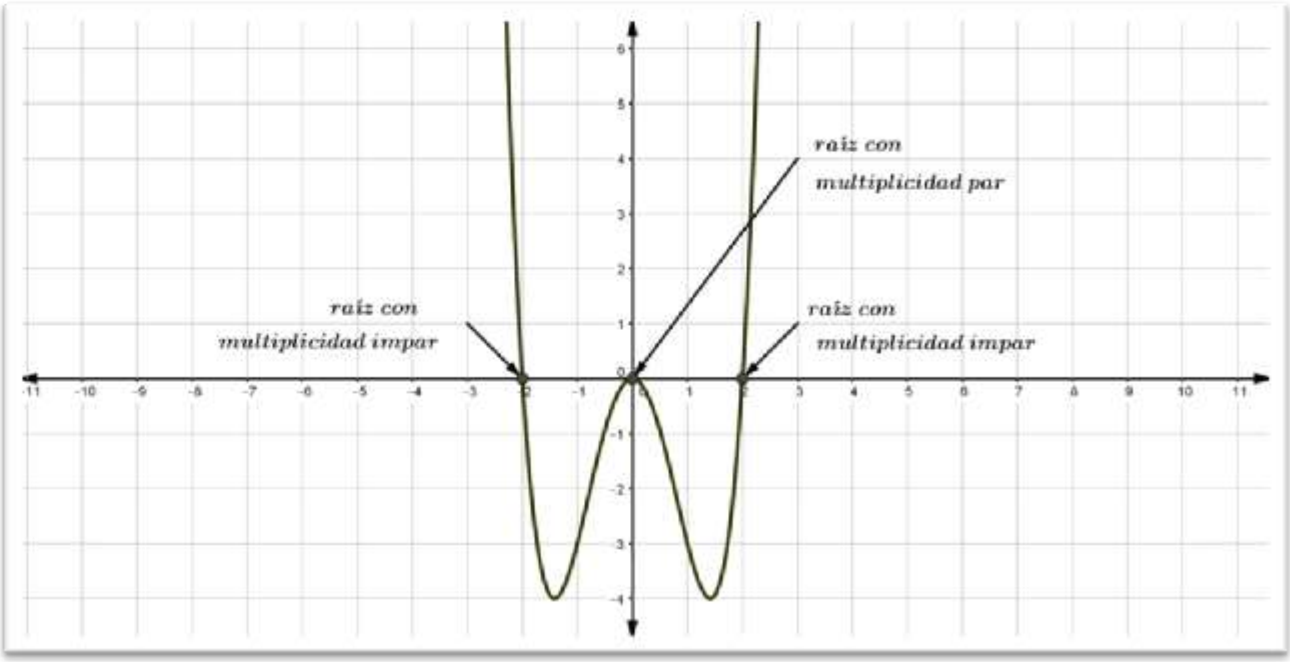
División sintética

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 1 & 0 & -4 \\ & & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & \mathbf{0} \end{array}$$

$$g(x) = (x+2)(x-2)(x)(x)$$

Si: $(x+2) = 0$ es un factor del polinomio entonces, x = -2 es una raíz del polinomio

Raíces reales	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	$x_3 = 2$	$x_4 = -2$
Multiplicidad	**2**	**2**	**1**	**1**



gráfica 1. 11

Ejercicio 1.4

Para cada una de las siguientes funciones, determina sus raíces; indicando su respectiva multiplicidad, factores, función factorizada y realiza el bosquejo de la gráfica correspondiente.

1. $f(x) = -2x^4 - 3x^2 + 5$
2. $g(x) = 10x^3 - 20x^2 - 190x + 200$
3. $h(x) = 12x^3 - 60x^2$
4. $i(x) = x^3 - 3x - 2$
5. $j(x) = -40x^3 - 130x^2 - 25x + 15$
6. $k(x) = 8x^3 + 4x^2 - 128x - 64$
7. $l(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$
8. $m(x) = 2x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 8x - 4$
9. $n(x) = 2x^3 - 32x$
10. $o(x) = 2x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 6x + 9$

1.6 Cálculo de ceros y graficación de funciones

En este apartado se analizará la relación que existe entre el término independiente, el signo del coeficiente principal, los ceros de una función polinomial y la representación gráfica de la función.

Con el propósito de que el alumno pueda realizar el bosquejo de una función polinomial de cualquier grado, si conoce al menos estos tres elementos.

Se iniciará con algunos ejemplos graficados con el software Geogebra.

Ejemplo 1.

Primero se aplica división sintética para hallar los ceros de la función polinomial, estos valores son los puntos de intersección con el eje x.

$$P(x) = -2x^3 + x^2 + 18x - 9$$

Los ceros son $x_1 = -3, x_2 = 3 \; y \; x_3 = \frac{1}{2}$, el grado del polinomio nos indica cuántos ceros tiene el polinomio y corresponde al máximo de intersecciones que puede tener con el eje de las abscisas, es decir, con el eje x. Utilizaremos los ceros obtenidos para escribir el polinomio en su forma factorizada.

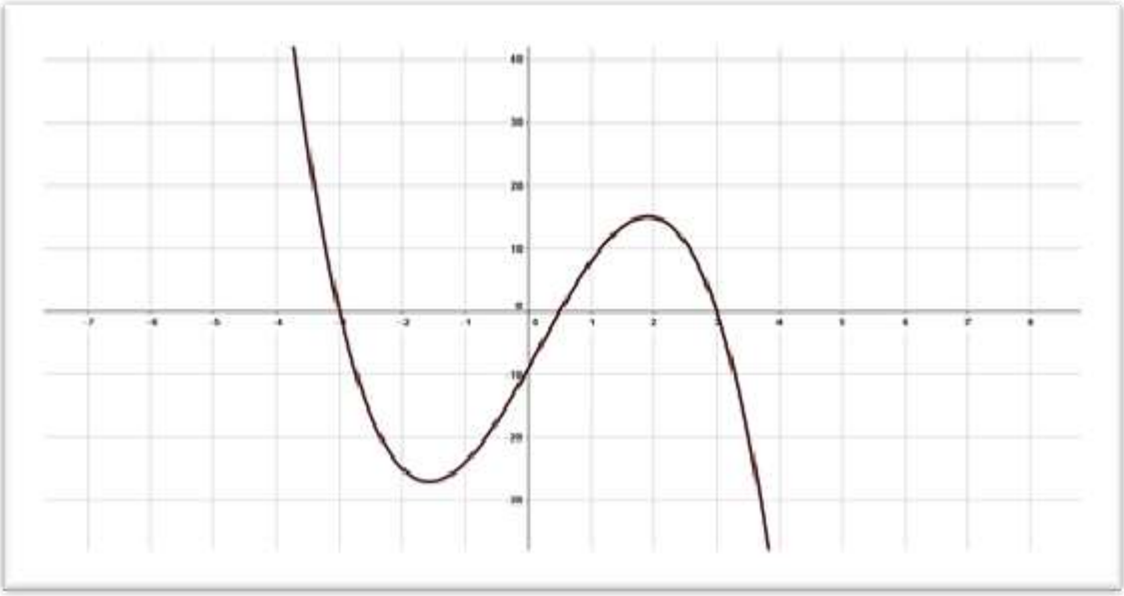
$$P(x) = -2(x - (-3))(x - 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$P(x) = -2(x + 3)(x - 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Recuerda que al expresar la función en su forma factorizada se invierten los signos de los ceros y se conserva el coeficiente principal en este caso es -2. Al evaluar x=0 se obtiene la intersección con el eje de las ordenadas (eje vertical), que corresponde al término independiente del polinomio.

$$P(0) = -2(0)^3 + (0)^2 + 18(0) - 9$$

O sea, el punto (0,-9) es parte de la gráfica. Graficando en Geogebra el polinomio tenemos:



gráfica 1. 12

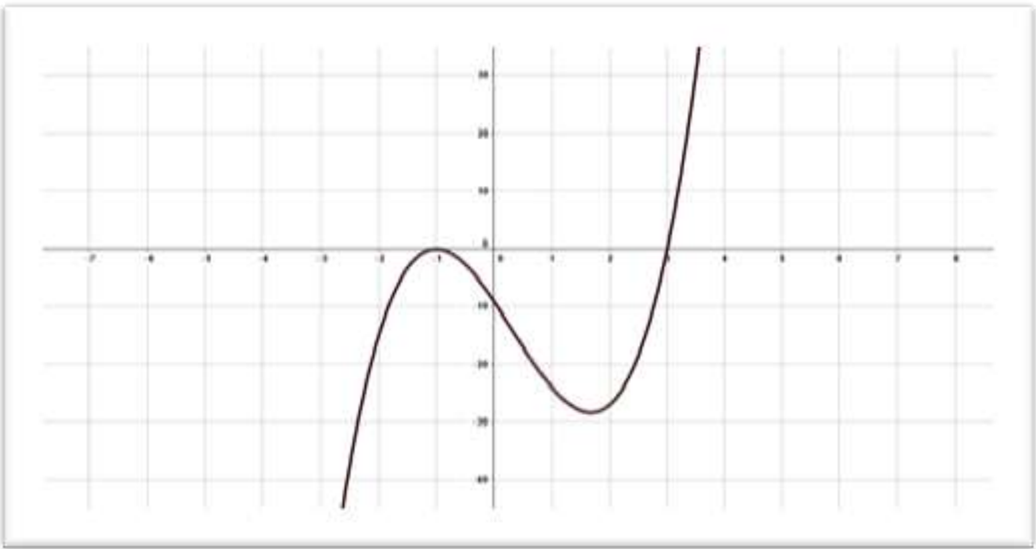
Gráfica de $P(x) = -2(x+3)(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$D_P\ (-\infty, \infty) \qquad R_P\ (-\infty, \infty)$

Ejemplo 2.

$Q(x) = 3x^3 - 3x^2 - 15x - 9$

Con ayuda de la división sintética, encontramos que los ceros son $x_1 = -1, x_2 = -1\ y\ x_3 = 3$, el coeficiente principal es 3 y el término independiente es -9.



gráfica 1. 13

Grafica de $Q(x) = 3(x+1)(x+1)(x-3)$

$D_Q\ (-\infty, \infty) \qquad R_Q\ (-\infty, \infty)$

Para el polinomio $Q(x)$ se obtuvieron raíces repetidas ($x_1 = x_2$), cuando esto sucede la curva del polinomio sólo toca al eje x. Así será el comportamiento de cualquier polinomio cuando los ceros se repitan un número par de veces, es decir, un polinomio con dos raíces iguales, cuatro, seis, ocho, etc.

Comparando las funciones $P(x)$ y $Q(x)$, podemos observar que ambas son de grado 3, cruzan el eje vertical en el término independiente, ambas tienen dominio y rango $(-\infty, \infty)$. Las diferencias entre ellas son que una tiene raíces reales diferentes y la otra tiene un par de raíces reales iguales, y la más importante es el signo del coeficiente del término cúbico que es quien determina la dirección de la curva.

En los siguientes ejemplos se analizarán funciones polinomiales de grado 4.

Ejemplo 3.

$R(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$

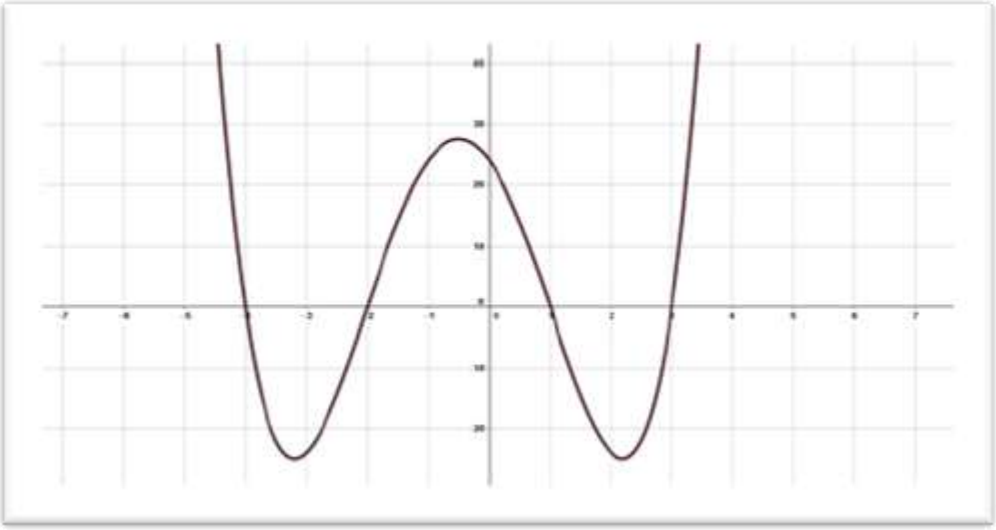
Nuevamente aplicaremos división sintética para hallar los ceros de cada una de las funciones.

$$R(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$$

$$R(x) = (x-1)(x-3)(x+2)(x+4)$$

Para cualquier función polinomial el dominio es $(-\infty, \infty)$. El Rango está relacionado con el signo del coeficiente principal, ya que si el coeficiente es positivo se tendrá un valor mínimo, en caso contrario se tiene un máximo valor de la función.

Para el ejemplo en gráfica de $R(x)$ se tiene un mínimo, el coeficiente principal es positivo, se puede observar que el valor mínimo está por debajo de -24 pero no se conoce con precisión cuál es el valor mínimo que tiene la función para ello definiremos un x_0, tal que $F(x_0)$ sea el valor mínimo de la función polinomial. Por lo que el Rango será $[F(x_0), \infty)$.



gráfica 1. 14

Gráfica de $R(x) = (x-1)(x-3)(x+2)(x+4)$

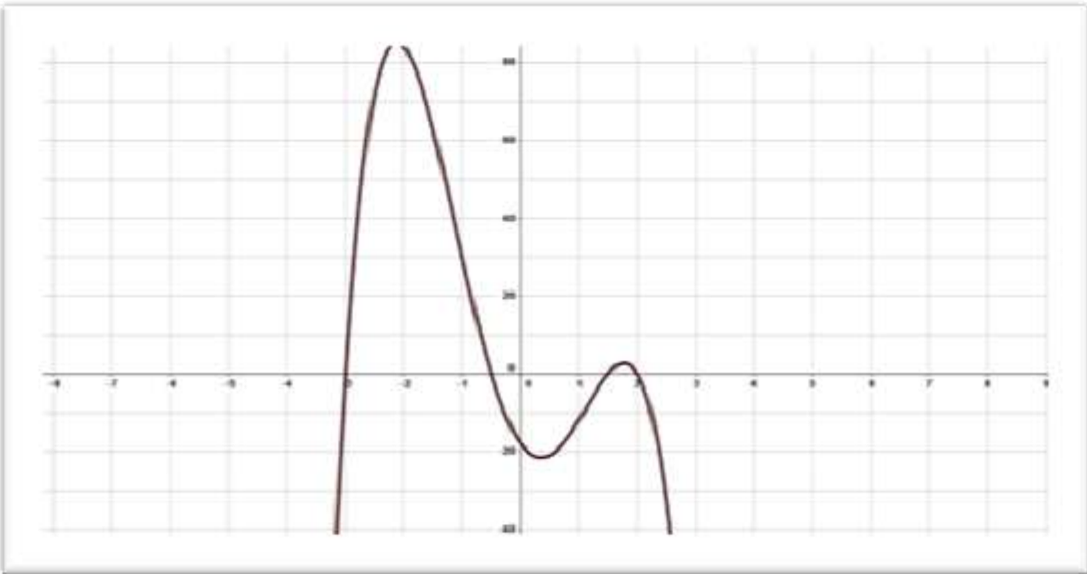
$D_R\ (-\infty, \infty) \qquad R_R\ [F(x_0), \infty)$

Ejemplo 4.

$S(x) = -4x^4 + 31x^2 - 21x - 18$

$$S(x) = -4(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+3)$$

Sea x_0 un valor en el dominio de $S(x)$ tal que $F(x_0)$ sea el valor máximo de la función.



gráfica 1. 15

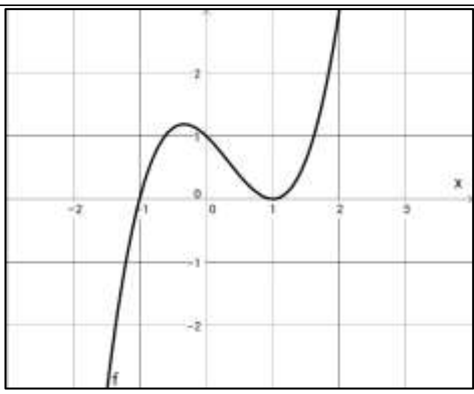
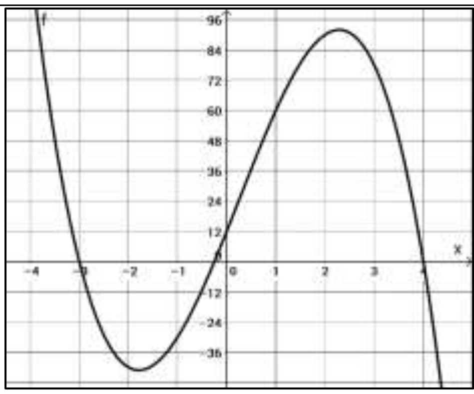
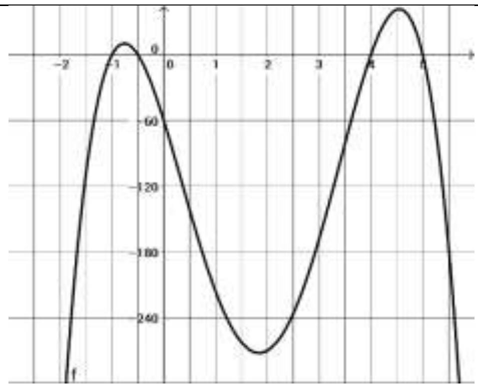
Gráfica de $S(x) = -4(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+3)$

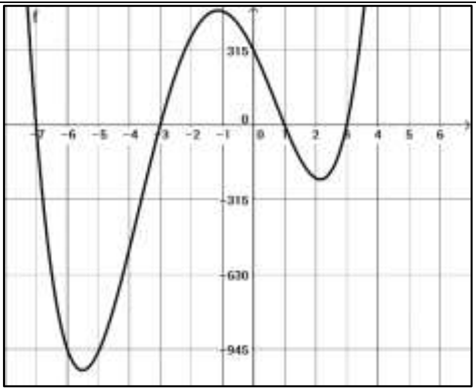
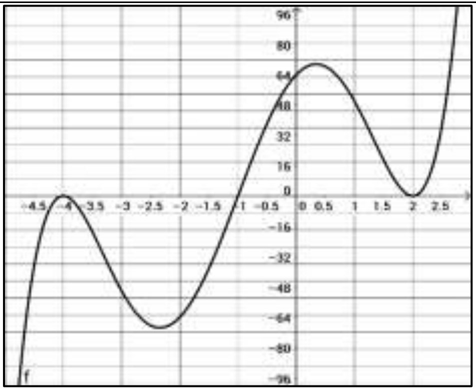
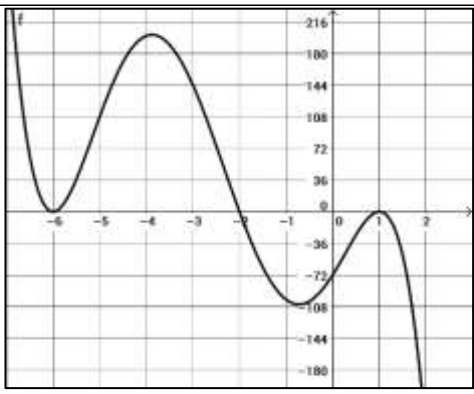
$D_S\ (-\infty, \infty) \qquad R_S\ (\infty, F(x_0)]$

En el ejemplo 3 y 4, podemos observar que ambos son de grado 4, la forma de la gráfica es parecida con la diferencia en la dirección de la curva depende del signo del coeficiente principal en la función $R(x)$ es 1 y en $S(x)$ es -4. Nuevamente el término independiente es la intersección con el eje de las ordenadas.

A continuación, se muestran algunos otros ejemplos de gráficas de funciones polinomiales de grado tres, cuatro, cinco y seis, con su respectiva función factorizada, dominio y rango.

Con la finalidad que se puedan identificar los elementos que permitan realizar un bosquejo de cualquier polinomio.

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ $f(x) = (x-1)(x-1)(x+1)$ $D_f\ (-\infty, \infty) \quad R_f\ (-\infty, \infty)$	
$g(x) = -4x^3 + 3x^2 + 49x + 12$ $g(x) = -4(x-4)(x+3)\left(x + \frac{1}{4}\right)$ $D_g\ (-\infty, \infty) \quad R_g\ (-\infty, \infty)$	
$h(x) = -6x^4 + 45x^3 - 42x^2 - 153x - 60$ $h(x) = -6(x+1)(x-4)(x-5)\left(x + \frac{1}{2}\right)$ $D_h\ (-\infty, \infty) \quad R_h\ (-\infty, h(x_0)]$ $h(x_0)$ es el valor máximo de la función	

$i(x) = 5x^4 + 30x^3 - 80x^2 - 270x + 315$ $i(x) = 5(x-1)(x-3)(x+7)(x+3)$ $D_i\ (-\infty, \infty) \quad R_i\ [i(x_0), \infty)$ $i(x_0)$ es el valor mínimo de la función	
$j(x) = x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 44x^2 + 32x + 64$ $j(x) = (x+1)(x-2)(x-2)(x+1)(x+4)$ $D_j\ (-\infty, \infty) \quad R_j\ (-\infty, \infty)$	
$k(x) = -x^5 - 12x^4 - 33x^3 + 34x^2 + 84x - 72$ $k(x) = -1(x+6)(x+6)(x-1)(x-1)(x+2)$ $D_k\ (-\infty, \infty) \quad R_k\ (-\infty, \infty)$	

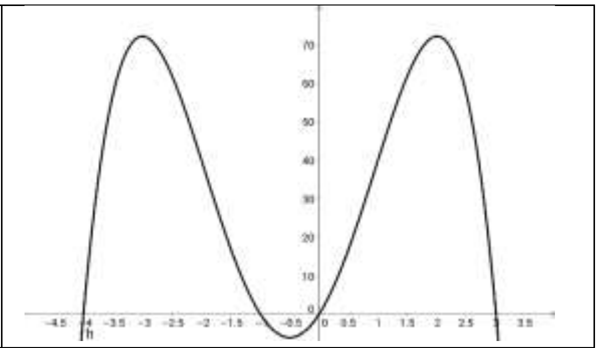
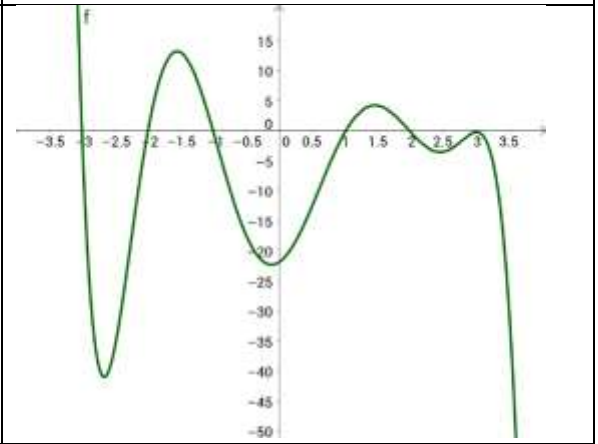
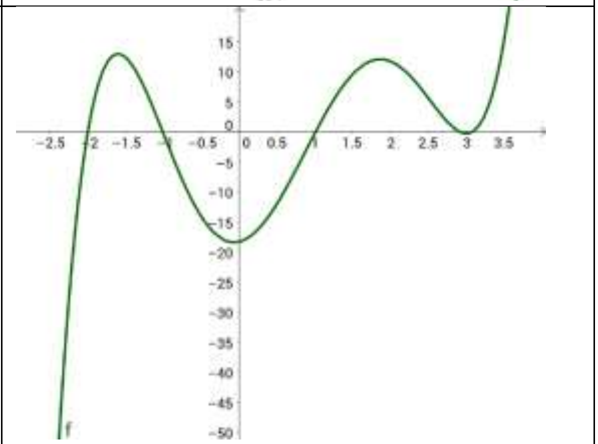
Ejercicio 1.5

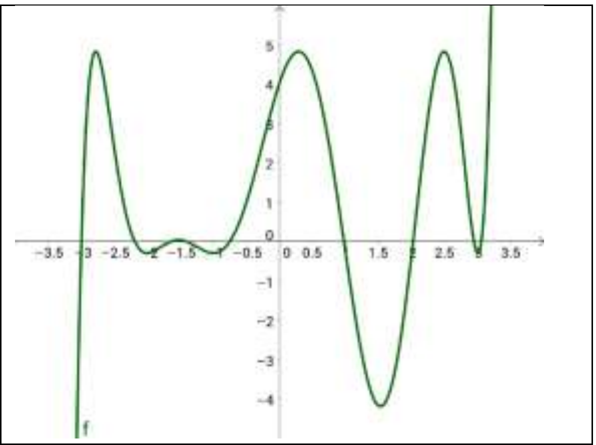
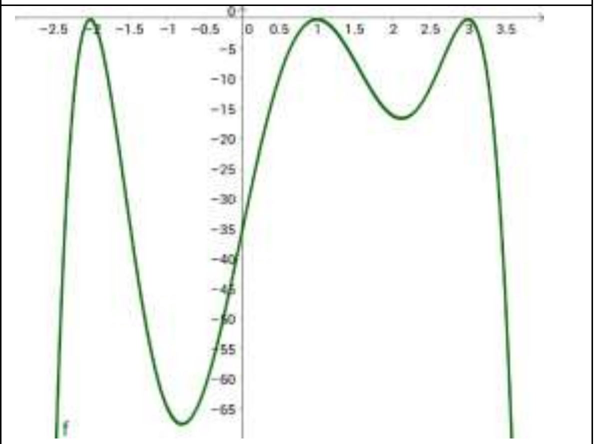
Realizar un bosquejo de las siguientes funciones polinomiales, escribe la función en su forma factorizada y encuentra su dominio y rango.

1) $f(x) = -2x^4 + 10x^2 - 8$
2) $g(x) = -x^4 + 13x^2 - 36$
3) $h(x) = x^3 + x^2 - x - 1$
4) $i(x) = 2x^5 - 9x^4 + 26x^2 + 6x - 9$
5) $j(x) = -x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 12x - 9$
6) $k(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

Ejercicio 1.6

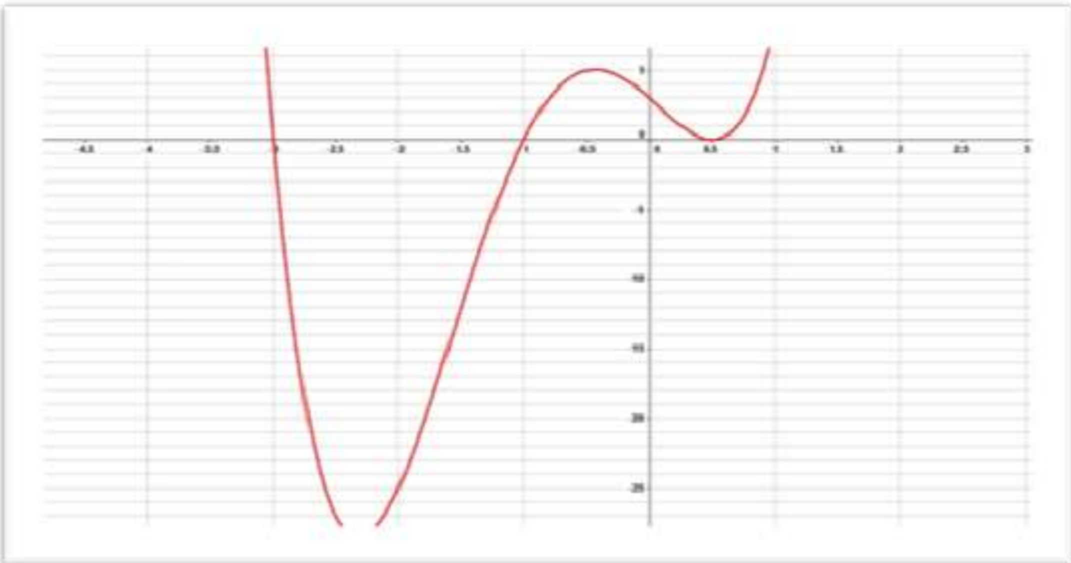
De acuerdo con lo visto hasta ahora, relaciona cada una de las siguientes columnas con la representación gráfica. Se sugiere que primero leas cuidadosamente los incisos de la izquierda.

A) Función polinomial de grado 5, con término independiente negativo	I.	
B) Polinomio con puras raíces repetidas	II.	
C) Función polinomial de grado siete	III.	

D) La gráfica corresponde al polinomio de mayor grado con respecto a las demás gráficas	IV.	
E) La gráfica corresponde al polinomio de menor grado con respecto a las demás gráficas	V.	

Lo que se realizará continuación es el proceso inverso, es decir, se proporcionará una gráfica y se obtendrá el polinomio correspondiente.

Ejemplo 5.



gráfica 1. 16

Por la forma de la curva y el número de ceros se asume que la función corresponde a un polinomio de grado cuatro positiva, con raíces repetidas, con término independiente en 3 y raíces en $x_1 = -3, x_2 = -1\ , x_3 = \frac{1}{2} y\ x_4 = \frac{1}{2}$

Con ayuda de los ceros, se puede plantear el polinomio en su forma factorizada. Recordemos que se invierten los signos de los ceros y se coloca el coeficiente principal al inicio en este caso llamaremos “a”.

$$f(x) = a(x-(-3))(x-(-1))\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$f(x) = a(x+3)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

Comenzaremos multiplicando los primeros dos paréntesis y los dos últimos.

$$\begin{array}{r} x+3 \\ x+1 \\ \hline x+3 \\ x^2+3x \quad \\ \hline x^2+4x+3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x-\frac{1}{2} \\ x-\frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{2}x+\frac{1}{4} \\ x^2-\frac{1}{2}x \quad \\ \hline x^2-x+\frac{1}{4} \end{array}$$

Posteriormente se multiplican los resultados obtenidos

$$\begin{array}{r} x^2-x+\frac{1}{4} \\ x^2+4x+3 \\ \hline 3x^2-3x+\frac{3}{4} \\ 4x^3-4x^2+x \quad \\ x^4-x^3+\frac{1}{4}x^2 \quad \quad \\ \hline x^4+3x^3-\frac{3}{4}x^2-2x+\frac{3}{4} \end{array}$$

Sustituimos el resultado obtenido.

$$f(x) = a\left[x^4+3x^3-\frac{3}{4}x^2-2x+\frac{3}{4}\right]$$

Multiplicamos por “a” al polinomio obtenido.

$$f(x) = ax^4+3ax^3-\frac{3}{4}ax^2-2ax+\frac{3}{4}a$$

Ya se tiene un polinomio de grado cuatro, pero aún falta que coincida el término independiente. Para ello necesitamos calcular el valor de “*a*”, por la forma de la gráfica sabemos que debe ser positiva, y que el termino independiente es 3. Con esta información plantearemos lo siguiente:

$$\frac{3}{4}a = 3$$

$$a = \frac{3}{1} \div \frac{3}{4}$$

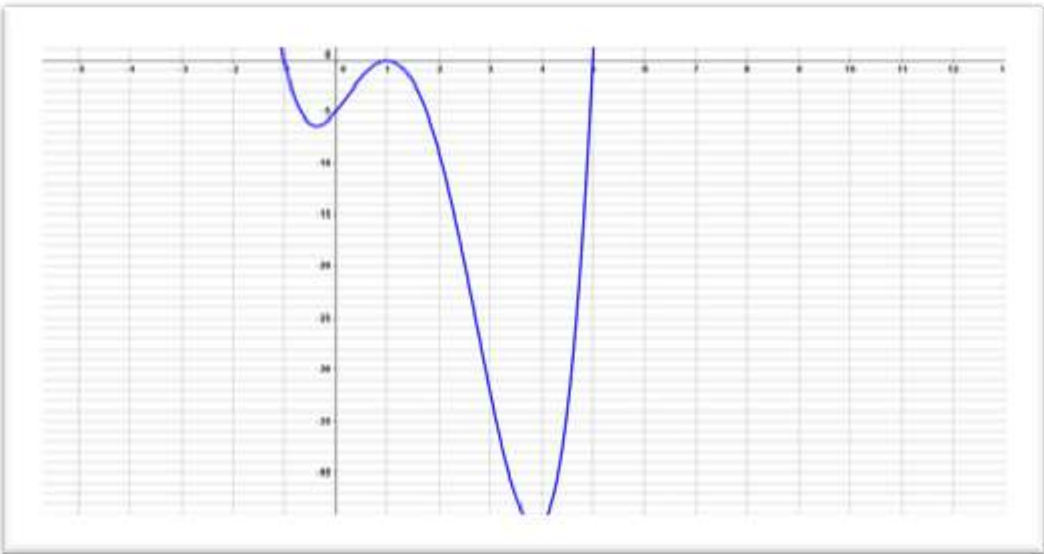
$$a = 4$$

Sustituyendo el valor de “*a”* en la función se obtendrá el polinomio buscado.

$$f(x) = 4\left[x^4 + 3x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 2x + \frac{3}{4}\right]$$

$$f(x) = 4x^4 + 12x^3 - 3x^2 - 8x + 3$$

Ejemplo 6.



gráfica 1. 17

$$g(x) = a(x+1)(x-1)(x-1)(x-5)$$

$$g(x) = a[x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 6x - 5]$$

$$-5a = -5$$

$$a = 1$$

$$g(x) = x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 6x - 5$$

Ejemplo 7.

Obtén una función polinomial que tenga término independiente 18 y cuyas raíces sean $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 - 2, x_4 = -1\ y\ x_5 = 9$

Por el número de raíces se infiere que el polinomio será de grado 5.

$$h(x) = a(x-3)(x-4)(x+2)(x+1)(x-9)$$

$$h(x) = a[x^5 - 13x^4 + 29x^3 + 85x^2 - 174x - 216]$$

$$a(-216) = 18$$

$$a = \frac{18}{-216}$$

Simplificando a

$$a = -\frac{1}{12}$$

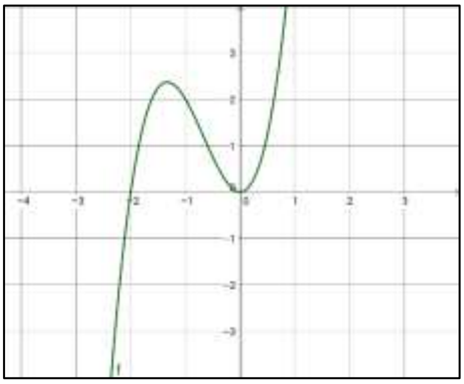
$$h(x) = -\frac{1}{12}[x^5 - 13x^4 + 29x^3 + 85x^2 - 174x - 216]$$

$$h(x) = -\frac{1}{12}x^5 + \frac{13}{12}x^4 - \frac{29}{12}x^3 - \frac{85}{12}x^2 + \frac{29}{2}x + 18$$

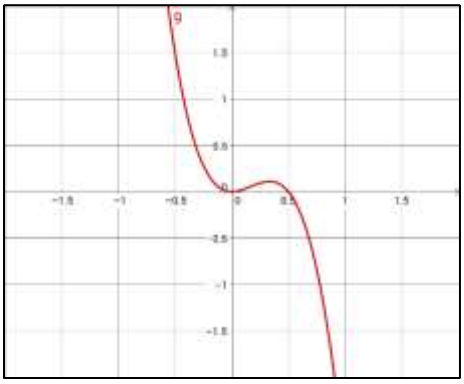
Ejercicio 1.7

Hallar las funciones polinomiales que correspondan a las siguientes gráficas

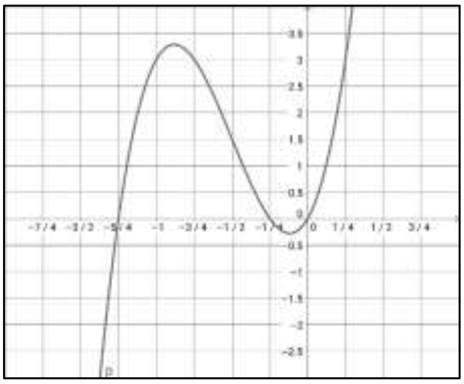
1.-



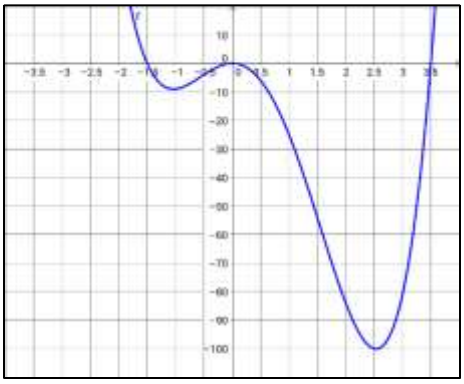
2.-



3.-



4.-



PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE FUNCIONES POLINOMIALES.

Las funciones polinomiales son utilizadas para modelar diferentes situaciones, se ocupan en problemas de diferentes áreas como son; física, química, biología, entre otros.

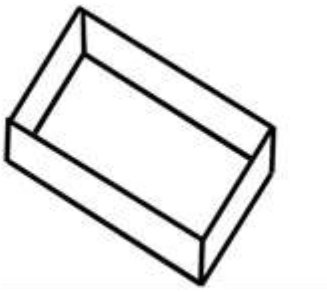
A continuación, se presentan una serie de problemas que pueden modelarse mediante funciones polinomiales.

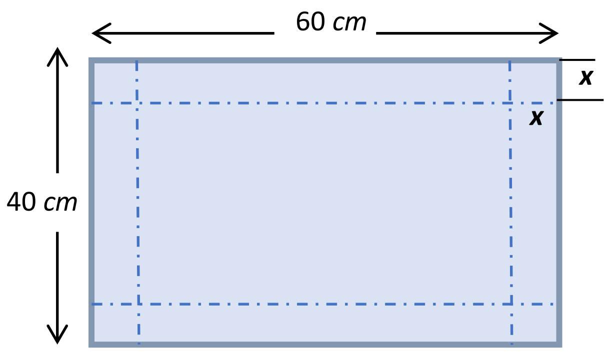
1. Se puede hacer una caja abierta de un pedazo rectangular de cartulina, recortando un cuadrado de lado x de cada esquina y doblando los lados hacia arriba. Si la cartulina mide $60\ cm$ por $40\ cm$, exprese el volumen de la caja $V(x)$ como una función de x. Trace la gráfica para $x > 0$. Utilice la gráfica de $V(x)$ para aproximar el valor de x que maximiza su volumen.

Solución:

Recuerda que siempre debemos inciar con leer el enunciado y tratar de comprender cada parte de este, despues es necesario que hagas un dibujo que represente la situación, luego intenta tener claridad de lo que se busca y con los datos que tienes busca las formas o la manera de resolverlo tomando encuenta lo revisado hasta el momento.

En este problema se trata de construir una caja, con un pedazo de cartulina, como se indica en la figura.





Lo que sabemos es que el volumen de un prisma rectangular se calcula mediante la fórmula $V = largo * ancho * alto$ y que cada esquina se debe hacer mediante cuadrados de x media, por lo que al sustituir los valores se tiene que

$$Largo = 60cm - 2x$$

$$ancho = 40 - 2x$$

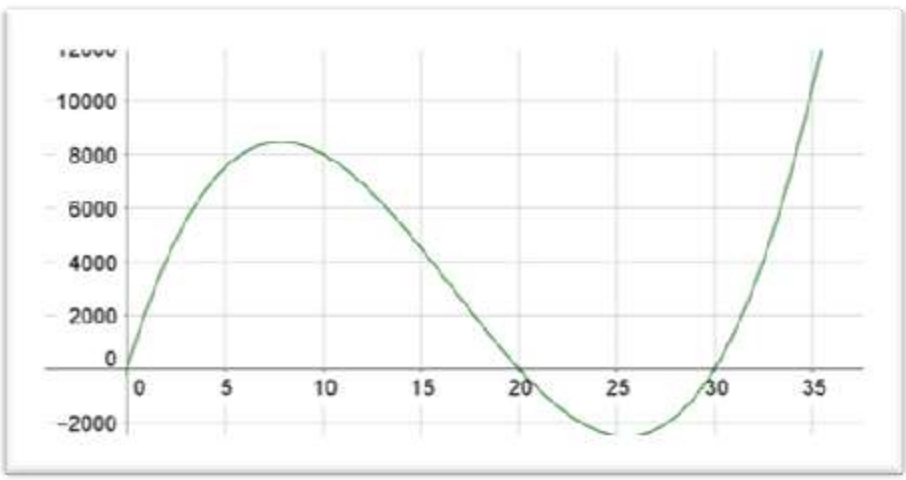
$$alto = x$$

Por lo que:

$$V(x) = (60 - 2x)(40 - 2x)(x)$$
$$V(x) = (2400 - 120x - 80x + 4x^2)(x)$$
$$V(x) = 4x^3 - 200x^2 + 2400x$$

Es la función que expresa el volumen de la caja.

Al trazar la gráfica para $x > 0$ nos queda



gráfica 1. 18

Finalmente podemos observar en la gráfica que aproximadamente el valor de x que maximiza el volumen esta entre 7cm y 8 cm.

2. Una pastilla de aspirina en forma de cilindro circular recto tiene altura de $\frac{1}{3}$ de centímetro y radio de $\frac{1}{2}$ centímetro. El fabricante también desea vender la aspirina en forma de capsula. La capsula debe medir $\frac{3}{2}$ centímetros de largo, en forma de cilindro circular recto con semiesferas unidas en ambos extremos.

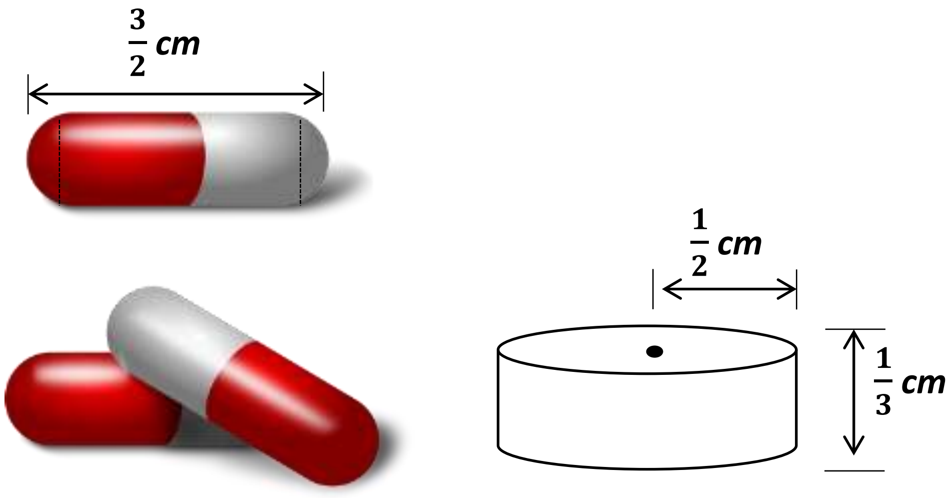
a) Si *r* denota el radio de un hemisferio, encuentre una fórmula para el volumen de la cápsula.

b) Encuentre el radio de la cápsula para que su volumen sea igual al de la pastilla, graficando la función que se obtiene considerando el volumen igual a la pastilla

Solución:

Para este caso hacemos un dibujo y colocamos los valores en donde corresponden

a)



Ahora, sabemos que para calcular el volumen de una pastilla cuya forma es un prisma circular es:

$$V_{pastilla} = \pi r^2 h$$

Sustituyendo los valores tenemos que;

$$V_{pastilla} = \pi \left(\frac{1}{2}cm\right)^2 \left(\frac{1}{3}cm\right)$$
$$V_{pastilla} = \pi \left(\frac{1}{4}cm^2\right) \left(\frac{1}{3}cm\right)$$
$$V_{pastilla} = \frac{\pi}{12}cm^3$$

Para el volumen de la cápsula se debe considerar el volumen de las dos semiesferas (una esfera) y el volumen del cilindro circular.

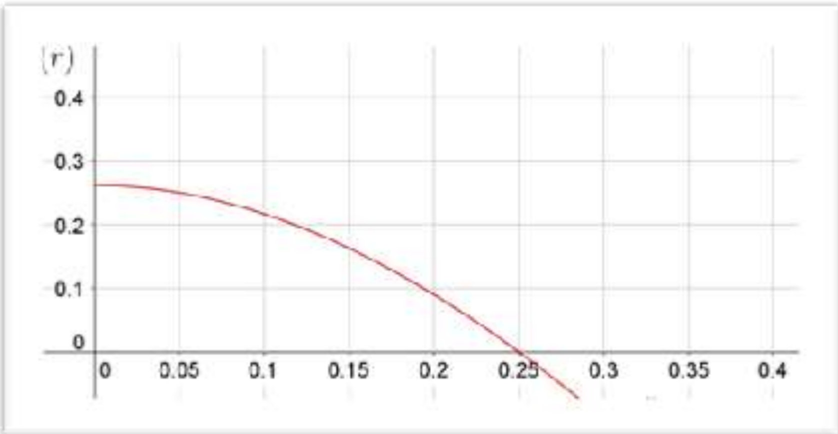
$$V_{cápsula} = 2V_{semiesfera} + V_{cilindro}$$
$$V_{cápsula} = V_{esfera} + V_{cilindro}$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$V_{cilindro} = \pi r^2 h$$
$$V_{cápsula} = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$$
$$V_{cápsula} = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2\left(\frac{3}{2} - 2r\right)$$
$$V_{cápsula} = \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{3}{2}\pi r^2 - 2\pi r^3$$
$$V_{cápsula} = \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{3}{2}\pi r^2 - 2\pi r^3$$
$$V_{cápsula} = -\frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{3}{2}\pi r^2$$

b) Luego, para que el radio de la cápsula y su volumen sea igual al de la pastilla

$$V_{cápsula} = V_{pastilla}$$

$$-\frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{3}{2}\pi r^2 = \frac{\pi}{12}$$
$$V(r) = \frac{2}{3}\pi r^3 - \frac{3}{2}\pi r^2 + \frac{\pi}{12}$$



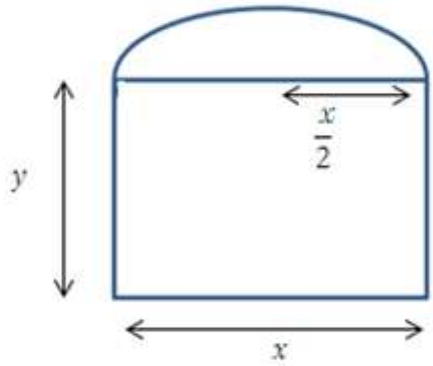
gráfica 1. 19

Podemos observar que para que el volumen de la capsula sea igual al de la pastilla el radio debe ser aproximadamente cero, sin embargo, esto no es posible ya que si el radio fuera cero no se tendría pastilla.

3. Una ventana normada tiene forma de rectángulo con un semicírculo encima. Determine las dimensiones del área máxima que tiene como perímetro 12 pies y halle esta área máxima.

Solución:

Primero dibujamos la ventana y colocamos los datos que nos indican



Ahora sabemos que el perímetro

$$P = 12\,pies$$

$$P\ Total = Perímetro\ de\ la\ semicircunferencia + perimétro\ del\ rectangulo$$

$$12 = \frac{\pi D}{2} + 2x + 2y$$
$$12 = \pi r + 2x + 2y$$

Sustituyendo el radio que es $r = \frac{y}{2}$

$$12 = \pi\left(\frac{x}{2}\right) + 2x + 2y$$

$$12 = \frac{\pi x}{2} + 2x + 2y$$

Despejando y se tiene

$$12 - \frac{\pi x}{2} - 2x = 2y$$
$$6 - \frac{\pi}{4}x - x = y$$

Ahora para saber el área de la ventana es

$$A\ Total = área\ de\ la\ semicircunferencia + área\ del\ rectangulo$$

$$A_{Total} = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + xy$$

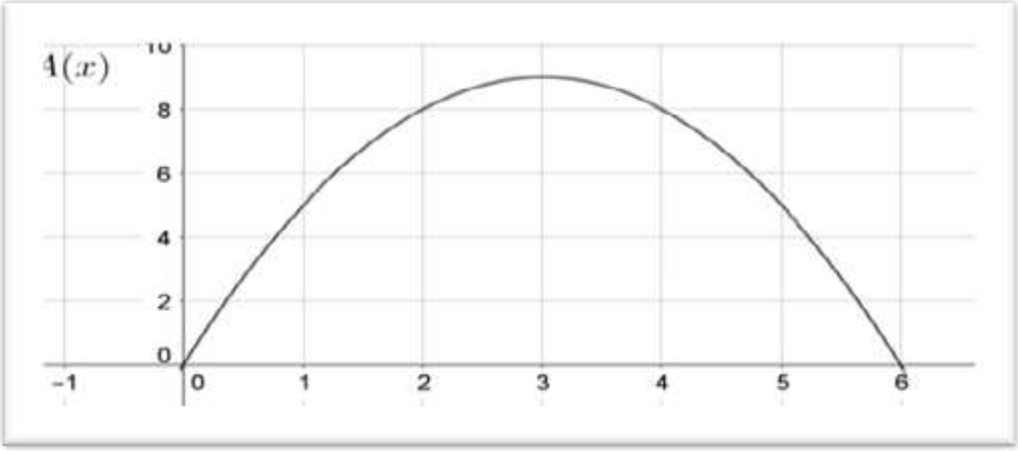
Y sustituyendo y tenemos que;

$$A_{Total} = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + x\left(6 - \frac{\pi}{4}x - x\right)$$

Realizando las operaciones

$$A_{Total} = \frac{\pi x^2}{4} + 6x - \frac{\pi x^2}{4} - x^2$$

$$A(x) = 6x - x^2$$



gráfica 1. 20

Observando la imagen podemos ver que el vértice está en $(3{,}9)$ y esta es el área máxima, es decir cuando el valor de x (lado de la ventana) es 3 pies se obtiene el área máxima que es 9 pies^2.

En base a estos problemas resueltos, ahora resuelve los siguientes problemas.

Ejercicio 1.8

1. Se tiene un tanque con aceite en forma de cilindro circular recto con tapas hemisféricas en cada extremo. El cilindro tiene 55 cm de largo y su volumen es de $11000\pi\ cm^3$. Sea x el radio común de los hemisferios y el cilindro.
   a) Encuentre una ecuación polinomial que satisfaga x.

2. Un tanque contiene 30 galones de agua y se vacía por un tubo a una velocidad constante de 2 galones por hora ¿Cuántos galones tendrá el tanque después de 2, 4 y 5 horas?

3. La velocidad del sonido depende de la temperatura en el aire y se representa por la función lineal $v(t) = 331 + 0.6t$ .Grafica la función dada, usando la gráfica, contesta qué velocidad tiene el sonido si la temperatura de aire es:
   a) $25°C$
   b) $-10°C$

4. La población de vacas en una granja aumenta según la siguiente función lineal $P(t) = 20 + 4t$ donde t es el tiempo y se mide en número de años.
   a) Dibuja la gráfica de la función dada.
   b) ¿Qué dominio tiene la función?
   c) ¿En cuánto tiempo llega a 60 la población de vacas?

5. Calcula la velocidad horizontal con la que debe levantarse un proyectil desde un acantilado de 500 metros de alto para que golpee un blanco que se encuentra a 100 metros de distancia de la base del acantilado.

6. La función de costo de una empresa está dada por $C(x) = 1440 - 600x$ y la función de ingresos $I(x) = -20x^2 + 1000x$. Calcula la utilidad máxima de la empresa. $U(x) = I(x) - C(x)$

7. Un cobertizo de almacenamiento se va a construir en forma de cubo con un prisma triangular formando el techo. La longitud x de un lado del cubo está por determinarse.
   a) Si la altura total de la estructura es 6 pies, demuestre que su volumen V esta dado por $V(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2(6 - x)$
   b) Determine x para que el volumen sea de 80 pies cúbicos.

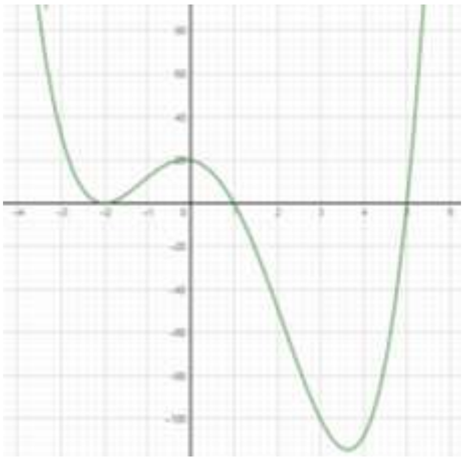
8. Un silo para granos tiene la forma de un cilindro circular recto con una semiesfera unida en la parte superior. Si la altura total de la estructura es de 30 pies encuentre el radio del cilindro que resulte si su capacidad total es de 1008π.

Autoevaluación de la unidad I

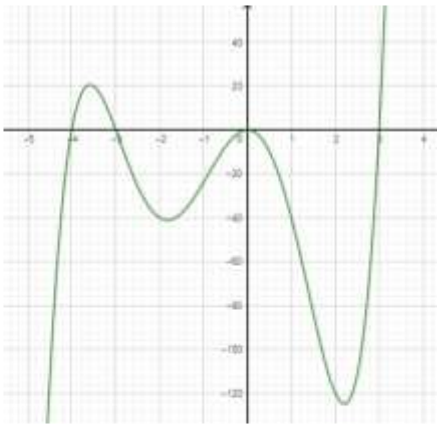
I. Una caja de cartón tiene base cuadrada de longitud x cm de lado. La longitud total de las 12 aristas de la caja es de 144 cm. Construir una ecuación que sirva para determinar la longitud x de la caja si la capacidad de la caja es de 1600 cm^3.

II. Determina una función polinomial que se ajuste al siguiente problema.
Una parcela rectangular de tierra tiene un área de 48 $pies^2$. Al trazar la diagonal entre las esquinas opuestas se mide y resulta ser 4 pies más larga que el ancho de la parcela. Construir una ecuación que sirva para obtener la dimensión correspondiente al largo de la parcela.

III. A partir de la siguiente gráfica, indica su orden o grado mínimo, sus raíces y su multiplicidad.



IV. A partir de la siguiente gráfica, indica su orden o grado mínimo, sus raíces y su multiplicidad.



V. Para la función $P_{(x)} = 12x^3 - 20x^2 + x + 3$; determina: las raíces del polinomio, los factores de la función e indica la función factorizada que se obtiene, realiza la gráfica correspondiente.

VI. Para la función $P_{(x)} = -2x^3 - 24x^2 - 70x$; determina: las raíces del polinomio, los factores de la función e indica la función factorizada que se obtiene, realiza la gráfica correspondiente.

VII. Determina una función polinomial que se ajuste a las siguientes características: raíces en -1, 1, 3 y 5; de grado 4 y que $f_{(0)}$ =45

VIII. Determina una función polinomial que se ajuste a las siguientes características: raíces en $\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} y\ 4$; de grado 3 y que $f_{(-4)} = -110$

IX. Se tiene una pieza de mantequilla de forma cúbica, a la cual se le corta una rebanada de 1cm de espesor, lo que deja un volumen de $180\ cm^3$. Determina las dimensiones originales de la pieza de mantequilla.

X. Un tanque de combustible está formado por una sección central, que corresponde a un cilindro circular recto, con una longitud de 4 pies y dos secciones semiesféricas a los extremos. Si el tanque tiene un volumen de $\frac{448\pi}{3}\ pies^3$. Calcula la longitud del radio (sólo existe una solución real)

Respuestas a los ejercicios.

Ejercicio 1.1	Ejercicio 1.2	Ejercicio 1.3
1. (F) Función.	1. Función.	1. D: (-∞, ∞), R: (-∞, ∞)
2. (R) Relación.	2. Función.	2. D: (-∞, ∞), R: (-∞, 3]
3. (F) Función.	3. Relación.	3. D: (-∞, ∞), R: [0, ∞)
4. (R) Relación.	4. Relación.	4. D: (-∞, ∞), R: (-∞, 0]
5. (F) Función.	5. Función.	5. D: (-∞, ∞), R: [-9, ∞)
6. (F) Función.	6. Relación.	6. D: (-∞, ∞), R: (-∞, ∞)
	7. Función.	

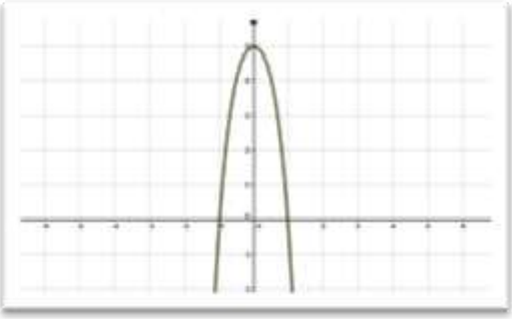
Ejercicio 1.4

Raíces.	**Multiplicidad de la raíz.**	**Factores.**	Función factorizada	**Gráfica.**
1.- **x =** **x =** **x =**			$f_{(x)} =$	
2.- **x = -4** **x = 1** **x = 5**	1 1 1	(x+4) (x-1) (x-5)	$\boldsymbol{f_{(x)} = 10(x-4)(x-1)(x-5)}$	

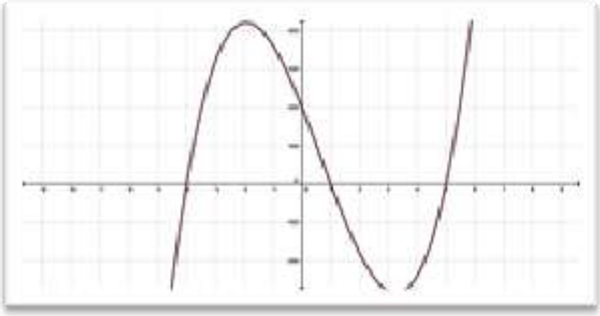
3.- **x = 0** **x = 0** **x = 5**	2 2 1	(x) (x) (x-5)	$\boldsymbol{f_{(x)} = 12(x)(x)(x-5)}$
4.- **x = -1** **x = -1** **x = 2**	1 1 1	(x+1) (x+1) (x-2)	$\boldsymbol{f_{(x)} = (x+1)(x+1)(x-2)}$
5.- **x = -3** **x =** $-\frac{1}{2}$ **x =** $\frac{1}{4}$	1 1 1	(x+3) (x+$\frac{1}{2}$) (x-$\frac{1}{4}$)	$\boldsymbol{f_{(x)} = -40(x+3)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-\frac{1}{4})}$
6.- **x = -4** **x =** $-\frac{1}{2}$ **x = 4**	1 1 1	(x+4) (x+$\frac{1}{2}$) (x-4)	$\boldsymbol{f_{(x)} = 8(x+4)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-4)}$
7.- **x = 0** **x = 2** **x = 4**	1 1 1	(x) (x-2) (x-4)	$\boldsymbol{f_{(x)} = (x)(x-2)(x-4)}$
8.- **x = -1** **x = -5** **x = 2** **x = 2**	1 1 2 2	(x+1) (x+5) (x+2) (x+2)	$\boldsymbol{f_{(x)} = 2(x+1)(x+5)(x+2)(x+2)}$
9.- **x = -4** **x = 0** **x = 4**	1 1 1	(x+4) (x) (x-4)	$\boldsymbol{f_{(x)} = 2(x+4)(x+4)(x)}$
10.- **x = -3** **x = -1** **x = -1** **x = 1** **x =** $\frac{3}{2}$	1 2 2 1 1	(x+3) (x+1) (x+1) (x-1) (x- $\frac{3}{2}$)	$\boldsymbol{f_{(x)} = 2(x+3)(x+1)(x+1)(x-1)(x-\frac{3}{2})}$

Gráficas del ejercicio 1.4

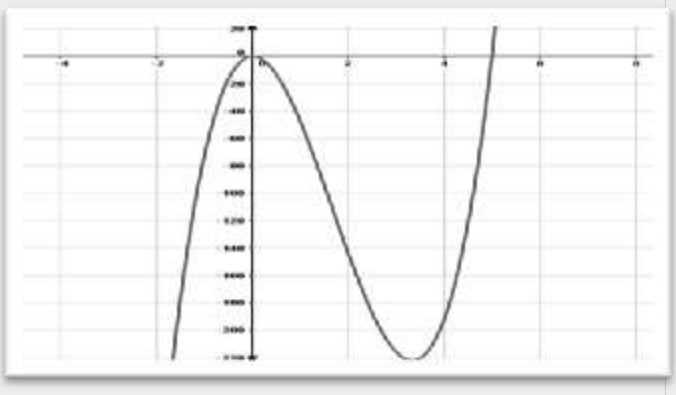
1.-



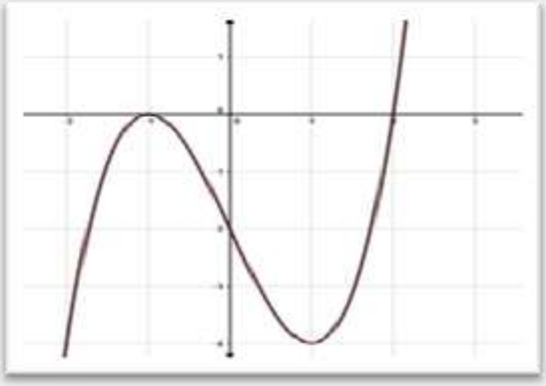
2.-



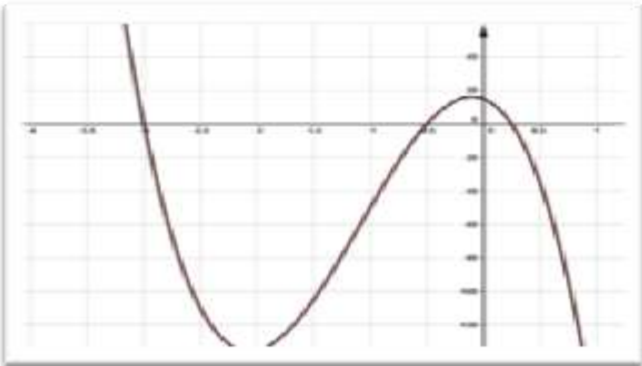
3.-



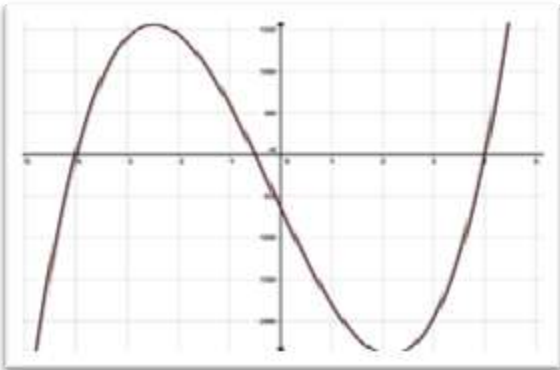
4.-



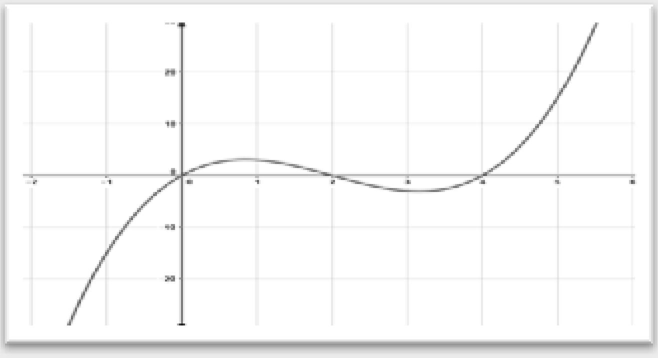
5.-



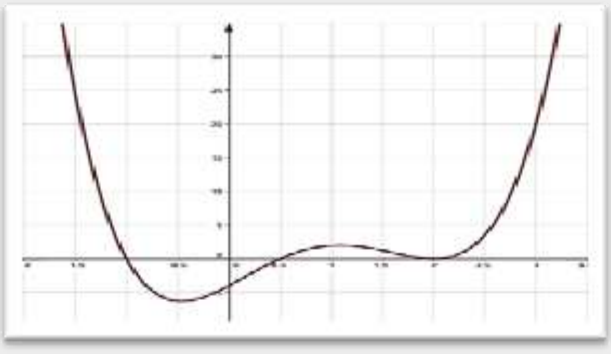
6.-

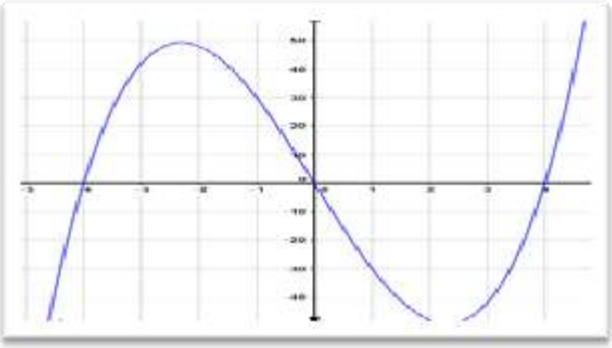
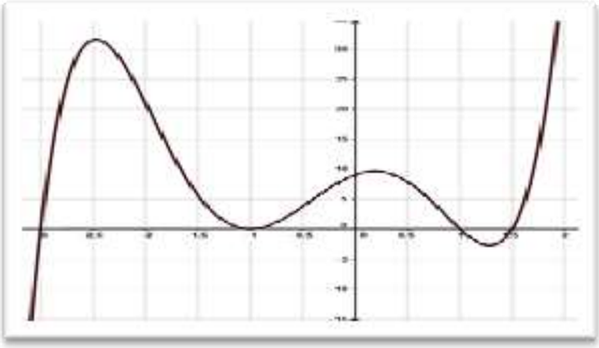


7.-

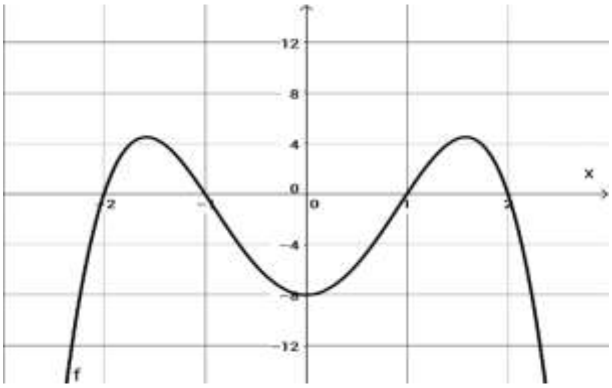
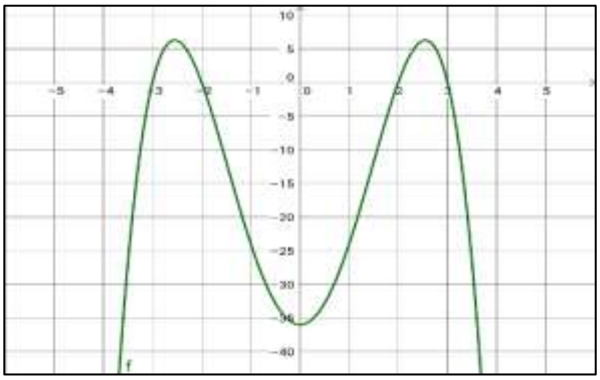
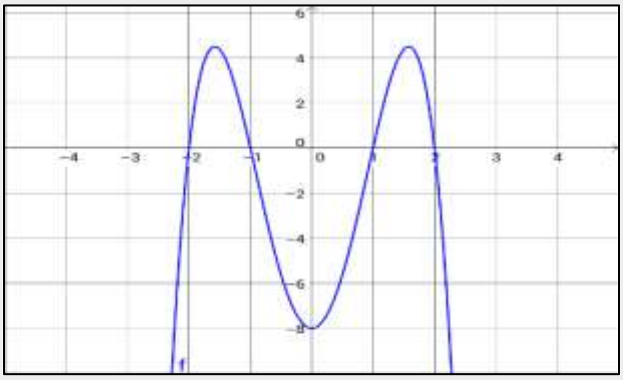
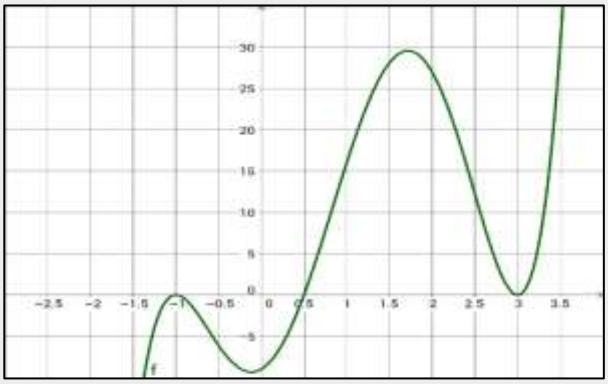


8.-

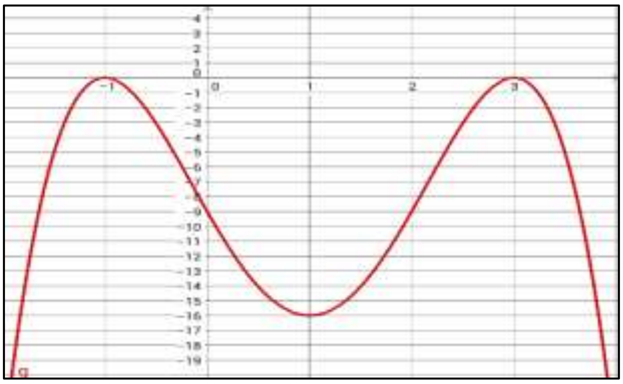


9.- 	10.- 

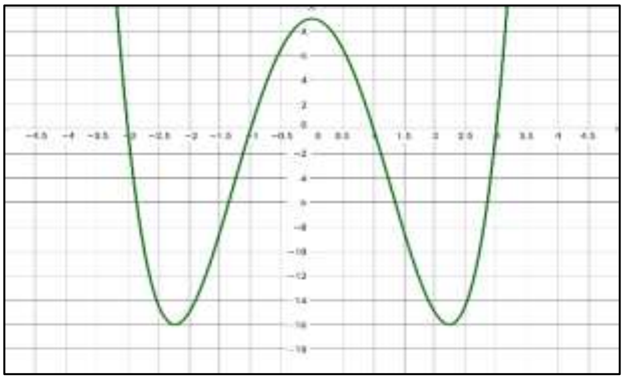
Solución ejercicio 1.5

1.- 	**2.-** 
3.- 	4.- 

5.-



6.-

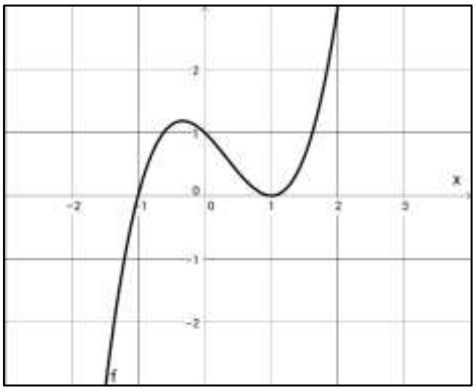


Ejercicio 1.6

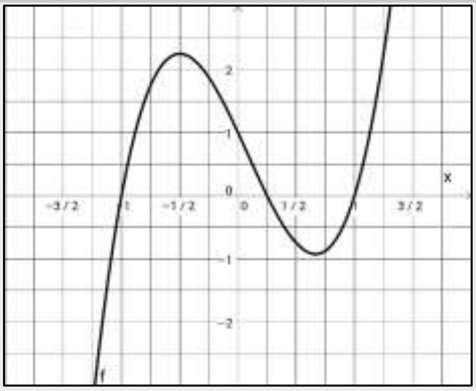
B - V	
A - III	
C - II	
D - IV	
E - I	

Ejercicio 1.7

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 - x^2 - x + 1}$$
$$\boldsymbol{f(x) = (x-1)(x-1)(x+1)}$$
$$\boldsymbol{D_f}\ (-\infty, \infty) \qquad \boldsymbol{R_f}\ (-\infty, \infty)$$



$$\boldsymbol{g(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 1}$$
$$\boldsymbol{g(x) = 4(x+1)\left(x - \frac{1}{4}\right)(x-1)}$$
$$\boldsymbol{D_g}\ (-\infty, \infty) \qquad \boldsymbol{R_g}\ (-\infty, \infty)$$



Ejercicio 1.8

1. $V(x) = \frac{4}{3}\pi x^3 + 55\pi x^2 - 11{,}000\pi$

2. $y = 10 + 2x; x = 2\ y = 14\ gal; x = 4\ y = 18\ gal; x = 5\ y = 20\ gal$

3. $v(25) = 346; v(-10) = 325$

4. $b)D: [0, \infty); c)10\ años$

5. $y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_{0_y}t + y_0; velocidad\ horizontal\ 9.89\ {}^{m}/_{s}$

6. $(40{,}30560)$

7. $x = 4\ pies$

8. $x^3 - 90x^2 + 3024 = 0;\ r = 6$

Solución de la autoevaluación de la unidad I

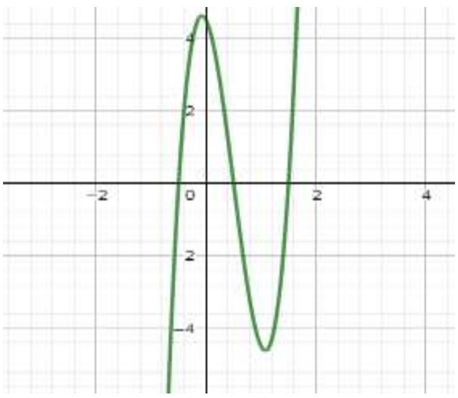
I. $x^3 - 18x^2 + 800 = 0$

II. $x^3 + 16x - 544 = 0$

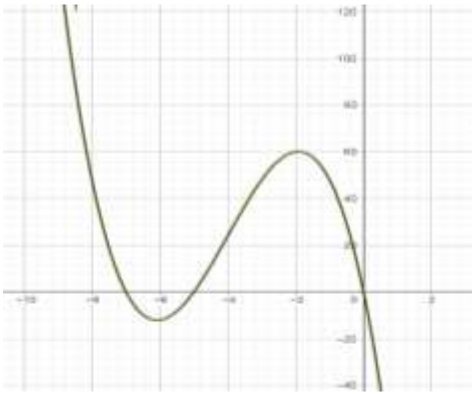
III. El grado de la función es 5, sus raíces son: -4, -3, 0, 0 y 3 y la multiplicidad de las raíces respectivamente es 1, 1, 2, 2 y 1.

IV. El grado de la función es 4, sus raíces son: -2, -2, 1 y 5 y la multiplicidad de las raíces respectivamente es 2, 2,1 y 1.

V. ceros: $-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$; los factores son $\left(x + \frac{1}{2}\right), \left(x - \frac{1}{2}\right), (x - \frac{3}{2})$; la función factorizada es $f_{(x)} = 12\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - \frac{3}{2})$



VI. ceros: $-7, 5, 0$; los factores son $(x+7), (x+5), (x)$; la función factorizada es $f_{(x)} = -2(x+7)(x+5)(x)$



VII. $f_{(x)} = -3x^4 + 15x^3 + 12x^2 - 69x + 45$

VIII. $f_{(x)} = -4x^3 + 16x^2 + 9x - 36$

IX. Como es un cubo, las dimensiones son: largo = ancho = espesor = 6 cm

X. r = 4 pies

UNIDAD 2. FUNCIONES RACIONALES Y FUNCIONES CON RADICALES

Propósito de la Unidad II.

Al finalizar el alumno:

Modelara algunas situaciones que dan lugar a funciones racionales y con radicales, analizará una gráfica, para identificar su dominio, rango, asíntotas y relacionar estas características con la situación problemática planteada.

Funciones Racionales.

Aprendizajes:

El alumno

- Explora situaciones que se modelan con funciones racionales.
- Identifica los elementos de una función racional: ceros, asíntotas verticales y huecos, dominio y rango para graficarla.
- Realiza gráficas de funciones que tengan asíntota horizontal diferente al eje de las x, asíntotas verticales, ceros, huecos, dominio y rango.
- Resuelve problemas de aplicación.

Temática:

- Funciones de la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $q(x) \neq 0$. Con $p(x)\ y\ q(x)$, polinomios de coeficientes reales, de grado menor o igual a dos.
- Elementos de las funciones:
  a. Dominio.
  b. Rango.
  c. Asíntotas verticales.
  d. Puntos de discontinuidad.
  e. Ceros de la función.
- Graficas de las funciones.
- Problemas de aplicación.

Funciones con Radicales

Aprendizajes:

El alumno

- Explora problemas sencillos que se modelen con Funciones con Radicales
- Identifica los elementos de una función: dominio, rango, ceros y traza su gráfica.
- Resuelve problemas de aplicación.

Temática

- Funciones de la forma
- $f(x) = \sqrt{ax \pm b}$
- $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$
- $con\ a, b, c\ \in \mathbb{R}$
- Elementos de las funciones
  - Dominio
  - Rango
  - Ceros de la función
- Grafica de funciones con radicales
- Problemas de aplicación

Funciones Racionales.

Una función racional se define como el cociente de dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$.

Notación funcional:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad es\ decir,$$

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b x^0} \quad q(x) \neq 0$$

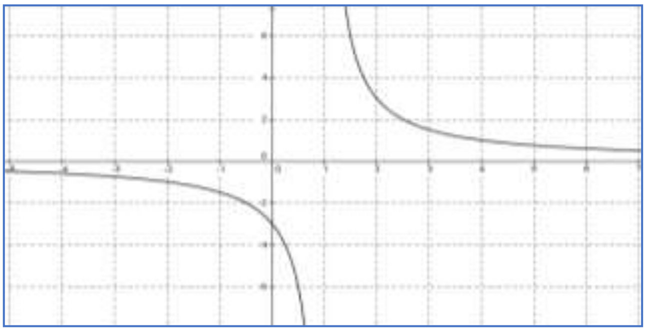
Sabemos que no es posible la división entre cero, por ello, las funciones racionales no son continuas, es decir, presentan alguna ruptura en aquellos valores de x para los cuales el denominador es nulo. Esto nos ayudará a definir el dominio de la función, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplos:

De las siguientes funciones racionales, llena la tabla de valores; determina el dominio y rango; e indica en qué valor(es) de x y en qué valor(es) de f(x) no hay gráfica, es decir, hay ruptura de la gráfica.

Ejemplo 1. $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{x-1}}$

D: (-∞, 1) u (1, ∞)
R: (-∞, 0) u (0, ∞)
En el valor de x=1 y en f(x)=0 no hay gráfica**.**

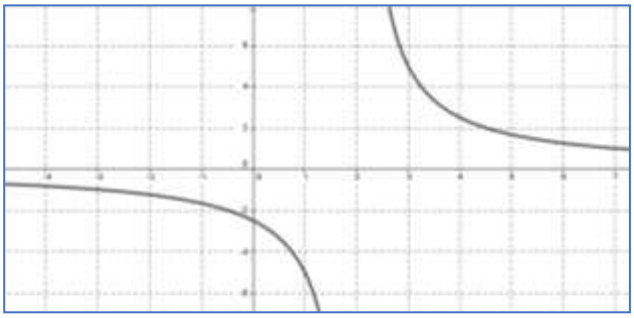


gráfica 2. 1

x	-2	-1	0	0.5	0.7	1	1.2	1.5	2
$f(x)$	-1	-1.5	-3	-6	-10	indefinido	15	6	3

Ejemplo 2. $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{5}}{\boldsymbol{x-2}}$

D: (-∞, 2) u (2, ∞)
R: (-∞, 0) u (0, ∞)
En el valor de x=1 y en y=0 no hay gráfica.



gráfica 2. 2

x	-2.5	-1	0	0.5	1	1.5	2	2.3
$f(x)$	-1.11	-1.66	-2.5	-3.33	-5	-10	indefinido	16.66

2.1 Graficación de las funciones racionales

Las funciones racionales tienen elementos que las caracterizan, es necesario determinar dichos elementos para tener una idea del comportamiento gráfico de la función

2.1.1 Intersección con los ejes

Sabemos que los valores donde una función es cero gráficamente corresponden a los valores de x donde intersecta al eje x, por otro lado, definimos la función racional como un cociente de dos polinomios, de donde, la función será cero, sí y sólo sí, el numerador es cero.

Por otra parte, podemos observar que en todo caso se intersectará al eje vertical en el instante donde x=0, por lo tanto, basta con evaluar a la función en ése valor para obtener la intersección con dicho eje.

2.1.2 Asíntotas

Ahora abordaremos el concepto de asíntota, existen tres tipos de ellas:

a) *Verticales*, que se obtendrán de los valores en donde el denominador es cero, en ejemplos anteriores son en x=1 y x=2, respectivamente. Observa cómo la gráfica se interrumpe y crece o decrece, para saber que ocurre se recomienda evaluar algunos valores alrededor de los valores indefinidos.

b) *Horizontales*, son aquellas que nos indican el comportamiento de la gráfica cuando x crece o decrece, es decir, cuando x es infinito o menos infinito. Para determinar si existe o no una asíntota horizontal se requiere observar el grado de los polinomios del numerador y denominador. Si n<m, la asíntota se encuentra en y=0, pero, si n=m entonces la asíntota dependerá de los coeficientes del término de mayor grado, o sea, $y = \frac{a_n}{b_m}$

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b x^0} \quad q(x) \neq 0$$

c) *Oblicuas*, son rectas con un grado de inclinación y se obtienen cuando n>m.

Para determinar la gráfica de una función racional se sugiere el siguiente análisis:

Ejemplo 1. $f(x) = \frac{-5x-15}{x+6}$

a) Hallar los ceros de la función

$$-5x - 15 = 0$$
$$-5x = 15$$
$$x = \frac{15}{-5}$$
$$x = -3$$

b) Hallar las asíntotas verticales

$$x + 6 \neq 0$$
$$x \neq -6$$

Para saber si la función crece o decrece alrededor de x=-6, se sugiere evaluar algunos puntos cercanos a -6.

x	f(x)	
-6.1	-155	decrece
-5.9	145	crece

Los signos de los valores obtenidos nos permiten saber si la función crece (positivo) o decrece (negativo).

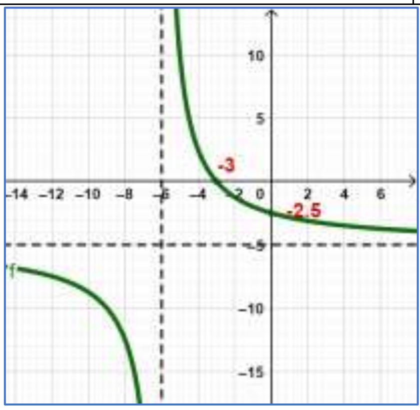
c) Asíntotas horizontales (n=m)

$$y = \frac{a_n}{b_m}$$
$$y = \frac{-5}{1}$$
$$y = -5$$

d) Intersección con el eje vertical (x=0)

$$f(0) = \frac{-5(0) - 15}{(0) + 6}$$
$$f(0) = \frac{-15}{6}$$
$$f(0) = -2.5$$

D: (-∞, -6) u (-6, ∞)
R: (-∞, -5) u (-5, ∞)



gráfica 2. 3

Ejemplo 2. g$(x) = \frac{1}{x^2}$

a) Hallar los ceros de la función

Como el numerador es una constante, la función nunca es cero, por lo tanto, no intersecta al eje x.

b) Hallar las asíntotas verticales

$$x^2 \neq 0$$
$$x \neq 0$$

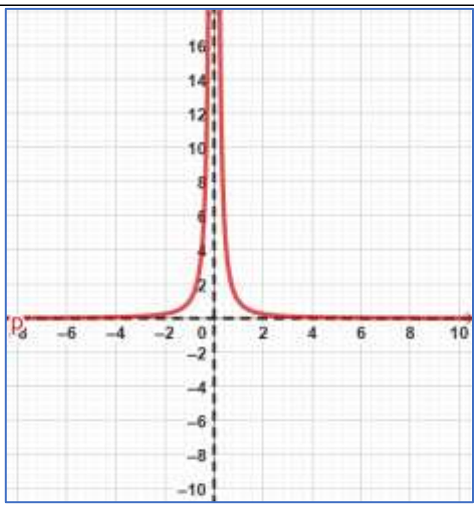
Para saber si la función crece o decrece alrededor de x=0.

x	f(x)	
-0.1	10	crece
0.1	10	crece

La función crece alrededor de x=0

c) Asíntotas horizontales (n<m)

$$y = 0$$



gráfica 2. 4

D: (-∞, 0) u 0, ∞)
R: (0, ∞)

d) Intersección con el eje vertical (x=0)
x=0 es un valor inválido para la función, por lo tanto, no intersecta al eje vertical.

Ejemplo 3. $h(x) = \frac{x+4}{2x-3}$

a) Hallar los ceros de la función

$$x + 4 = 0$$
$$x = -4$$

b) Hallar las asíntotas verticales

$$2x - 3 \neq 0$$
$$x \neq \frac{3}{2}$$
$$x \neq 1.5$$

Para saber si la función crece o decrece alrededor de x=1.5.

x	f(x)	
1.51	275.5	crece
1.49	-274.5	decrece

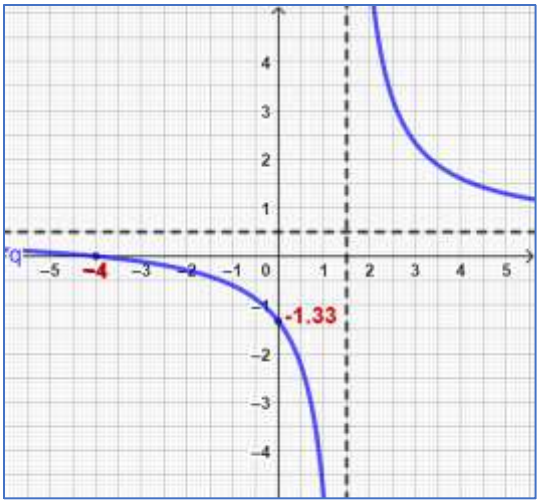
c) Asíntotas horizontales (n=m)

$$y = \frac{a_n}{b_m}$$
$$y = \frac{1}{2}$$
$$y = 0.5$$

d) Intersección con el eje vertical (x=0)

$$f(0) = \frac{(0) + 4}{2(0) - 3}$$
$$f(0) = \frac{4}{-3}$$
$$f(0) = -1.\overline{33}$$

D: (-∞, 1.5) u (1.5, ∞)
R: (-∞, 0.5) u (0.5, ∞)



gráfica 2. 5

Ejemplo 4. $i(x) = \frac{2x^2-4x-16}{x^2+2x-15}$

a) Hallar los ceros de la función

$$2x^2 - 4x - 16 = 0$$
$$2(x^2 - 2x - 8) = 0$$
$$2(x - 4)(x + 2) = 0$$
$$x - 4 = 0 \ \ o\ x + 2 = 0$$
$$x = 4\ o\ x = -2$$

b) Hallar las asíntotas verticales

$$x^2 + 2x - 15 \neq 0$$
$$(x + 5)(x - 3) \neq 0$$
$$x + 5 \neq 0 \ \ o\ x - 3 \neq 0$$
$$x \neq -5 \ \ o \ \ x \neq 3$$

c) Asíntotas horizontales (n=m)

$$y = \frac{a_n}{b_m}$$
$$y = \frac{2}{1}$$
$$y = 2$$

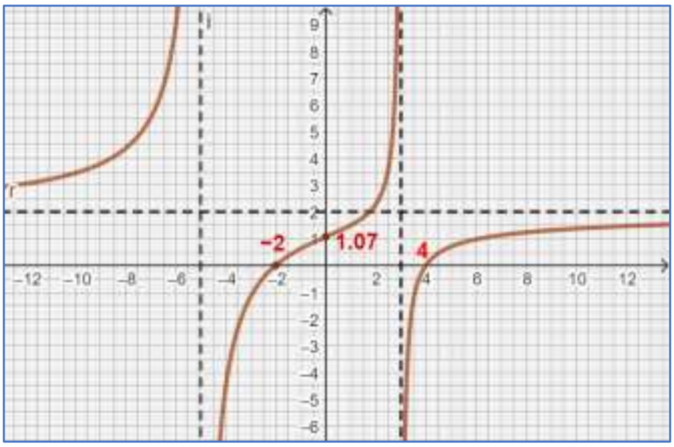
d) Intersección con el eje vertical (x=0)

$$i(0) = \frac{2(0)^2 - 4(0) - 16}{(0)^2 + 2(0) - 15}$$
$$i(0) = \frac{-16}{-15}$$
$$i(0) = 1.0\overline{66}$$

Para saber si la función crece o decrece alrededor de x=-5 y x=3

x	f(x)	
2.9	13.64	crece
3.1	-11.33	decrece
-4.9	-65.34	decrece
-5.1	69.65	crece

D: (-∞, -5) u (-5, 3) u (3, ∞)
R: (-∞, 2) u (2, ∞)



gráfica 2. 6

Ejemplo 5. $j(x) = \frac{3x^2-12}{x^2-x-2}$

a) Hallar los ceros de la función

$$3x^2 - 12 = 0$$
$$3(x^2 - 4) = 0$$
$$3(x-2)(x+2) = 0$$
$$x - 2 = 0 \;\; o \;\; x + 2 = 0$$
$$x = 2 \;\; o \;\; x = -2$$

b) Hallar las asíntotas verticales

$$x^2 - x - 2 \neq 0$$
$$(x-2)(x+1) \neq 0$$
$$x - 2 \neq 0 \; o \;\; x + 1 \neq 0$$
$$x \neq 2 \; o \;\; x \neq -1$$

Observa que para x=2 tenemos un cero y al mismo tiempo una asíntota vertical, cuando esto pasa se encuentra un hueco en la función, que no es más que un punto vacío en la gráfica. Para empezar, se escribe la forma factorizada y se simplifica:

$$j(x) = \frac{3(x+2)(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$
$$j(x) = \frac{3(x+2)}{x+1}$$

Evalúa x=2 en la función simplificada.

$$j(2) = \frac{3(2+2)}{2+1}$$
$$j(2) = \frac{3(4)}{3}$$
$$j(2) = 4$$

Entonces en (2,4) hay un hueco en la gráfica.
En esta misma evaluaremos valores alrededor de x=-1

x	f(x)	
-1.1	-27	decrece
-0.9	33	crece

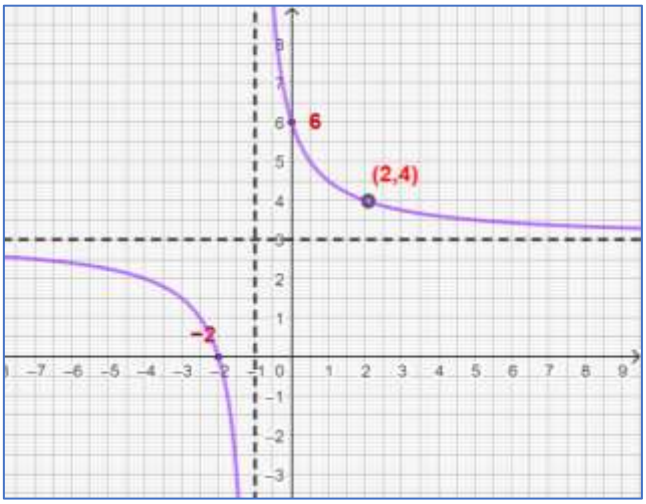
a) Asíntotas horizontales (n=m)

$$y = \frac{a_n}{b_m}$$
$$y = \frac{3}{1}$$
$$y = 3$$

b) Intersección con el eje vertical (x=0)

$$j(0) = \frac{3(0+2)}{0+1}$$
$$f(0) = 6$$

D: (-∞, -1) u (-1,2) u (2, ∞)
R: (-∞, 3) u (3,4) u (4, ∞)



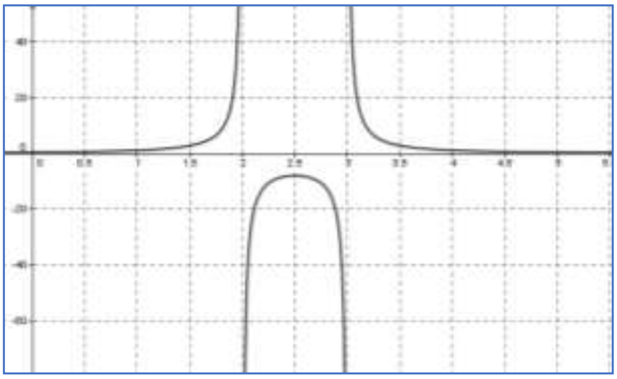
gráfica 2. 7

Ejercicio 2.1.

De las siguientes funciones racionales, llena la tabla de valores; determina el dominio y rango; e indica en qué valor(es) de x y en qué valor(es) de y no hay gráfica, es decir, hay ruptura de la gráfica.

x	f(x)
0	
1	
1.5	
2	
2.5	
3	
3.5	
4	

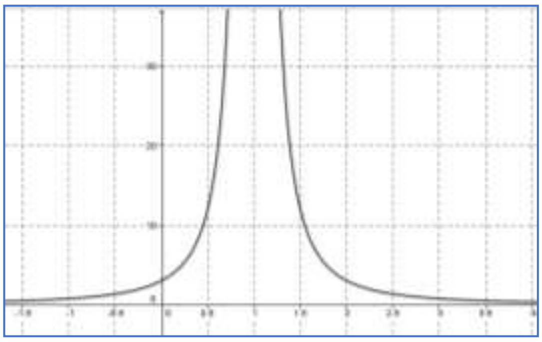
a) $f(x) = \frac{2}{(x-2)(x-3)}$



---

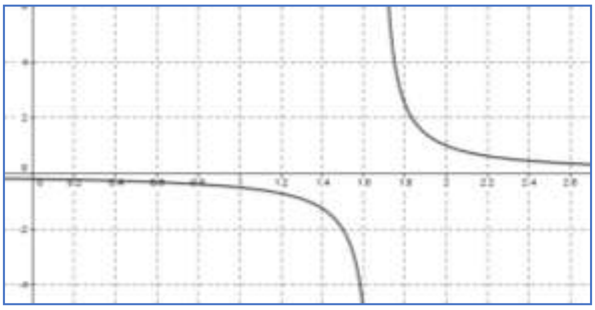
x	g(x)
-1	
0	
0.5	
1	
1.5	
2	
2.5	

b) $g(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$



x	h(x)
0	
1	
1.5	
1.6	
1.7	
2	

c) $h(x) = \frac{1}{3x-5}$



Ejercicio 2.2.

Realiza un bosquejo gráfico de las siguientes funciones y determina las asíntotas, dominio, rango, etc.

$f(x) = \frac{3x+9}{x^2-4}$ $\quad g(x) = \frac{-3x^2+12}{2x^2-2x-60}$ $\quad h(x) = \frac{18-3x}{3x+18}$ $\quad i(x) = \frac{x^2-3x-4}{4x^2-4}$

Problemas de aplicación de funciones racionales

Ejemplo 1.

Si la temperatura T permanece constante; la presión de un gas confinado P es inversamente proporcional a su volumen V. La presión del gas determinado en un recipiente esférico de 8 pulgadas de radio es de 20 $\frac{Lb}{pu\lg^2}$. Si el radio aumenta a 12 pulgadas.

a) Determine la constante de proporcionalidad.
b) Calcule la nueva presión (aproximada).
c) ¿Cuál es la ecuación que representa al problema?
d) Complete la tabla considerando valores de r:0.25, 0.5, 1, 2, 3, …,12
e) Represente la gráfica.

Solución.
Considerar cuales son los datos del problema

$P = 20\frac{Lb}{pu\lg^2}$ $\quad r_1 = 8$ pulg $\quad T = cte.$ $\quad r_2 = 12$ pulg.

Con base a los datos calcular la constante de proporcionalidad T.
a) Aplicando la definición de variación proporcional inversa representamos la ecuación:
$P = \frac{T}{r}$ y sustituyendo en la ecuación $20 = \frac{T}{8}$ $\therefore T = 160$ es la constante de proporcionalidad.

b) Como $r_2 = 12$ pulg. Obtenemos la nueva presión $P = \frac{160}{12}$ $\quad \therefore P = 13.333\frac{Lb}{pu\lg^2}$

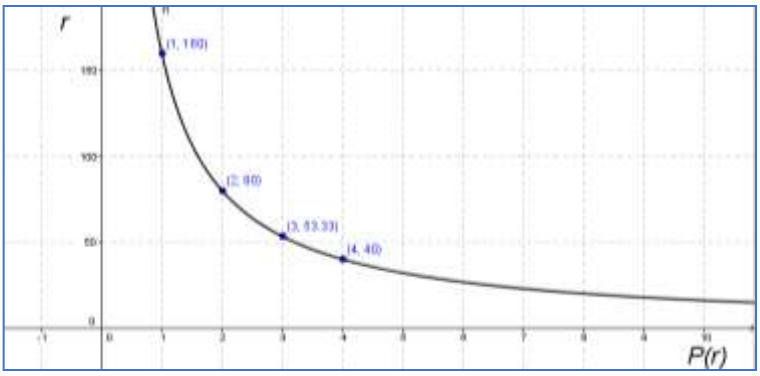
c) Entonces la ecuación que representa al problema es: $P = \dfrac{160}{r}$

d) La tabla correspondiente es:

r	0.25	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	640		160							20				

Observación: ¿Por qué los valores asignados a la variable independiente r son números reales no negativos?

e) Gráfica



gráfica 2. 8

Ejemplo 2.

La comisión de caza introduce 100 venados en terrenos estatales de caza, recién adquiridos. La población N del rebaño está modelada por la función $N_{(t)} = \frac{20(5+3t)}{1+0.04t}$ para $t \geq 0$, donde t es el tiempo en años.

a) Calcula la población de venados para t = 5, t = 15 y t = 25.

b) Traza la gráfica correspondiente y a partir de ella responde:
¿Cuál sería el tamaño límite del rebaño a medida que aumenta el tiempo?

Solución.

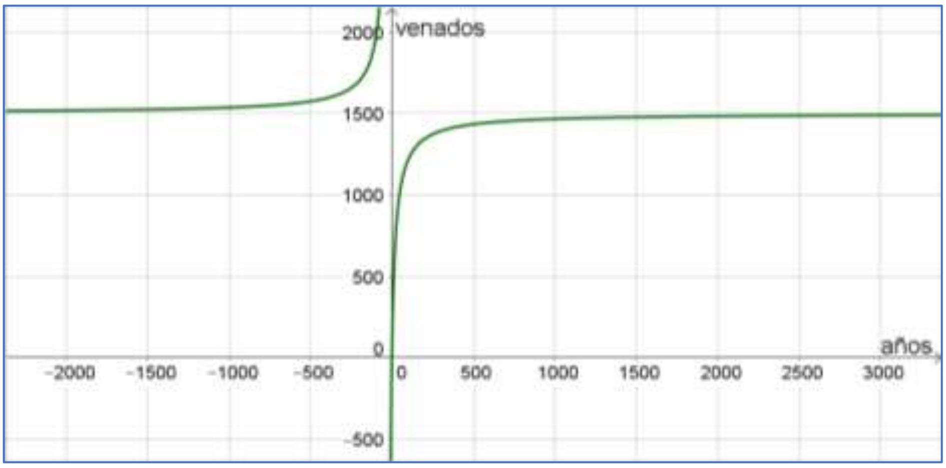
a) Para determinar el tamaño de la población de venados que se solicita, hay que evaluar la función para cada uno de los valores de t.

$N_{(5)} = \frac{20(5+3(5))}{1+0.04(5)}$ $\qquad N_{(5)} = 333.33$ (333 venados)

$N_{(15)} = \frac{20(5+3(15))}{1+0.04(15)}$ $\qquad N_{(15)} = 625$ venados

$N_{(25)} = \frac{20(5+3(25))}{1+0.04(25)}$ $\qquad N_{(25)} = 800$ venados

b) Representación gráfica



gráfica 2. 9

A partir de la gráfica podemos observar, que la población de venados se estabiliza a lo largo del tiempo en 1,500 individuos.

Ejemplo 3.

La ley de Coulomb $F = k\frac{q_1q_2}{r^2}$ se utiliza para estimar la fuerza, de atracción o repulsión, entre dos partículas eléctricamente cargadas. Si k es la constante dieléctrica con valor de $9x10^9\frac{NC}{m^2}$, $q_1\ y\ q_2$ son las cargas de las partículas en Coulomb (C) y r^2 es la distancia que separa a las partículas desde su centro, en metros. Si se tiene dos partículas con magnitud de $12\ \mu C\ y\ 3\mu C$:

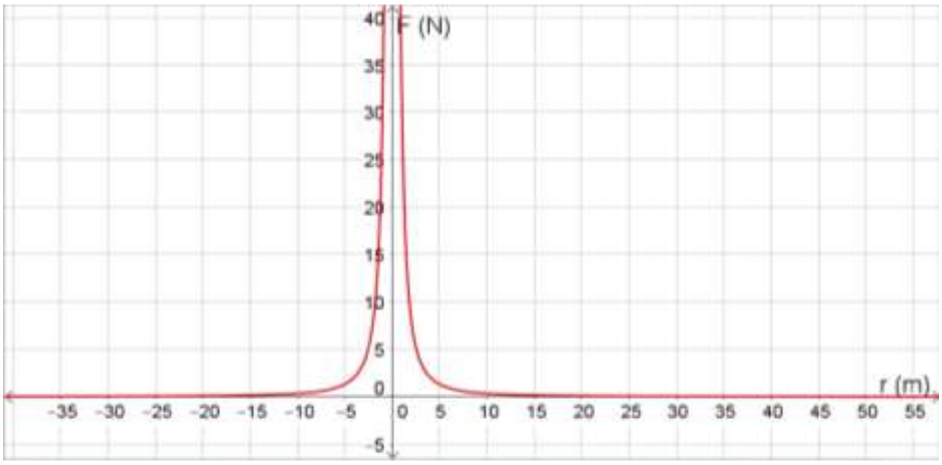
a) Expresa la función que modela la fuerza entre las partículas a partir de las condiciones dadas.
b) Realiza la gráfica correspondiente.
c) ¿Qué sucede con la fuerza cuando la distancia aumenta hasta infinito?
d) ¿Qué sucede con la fuerza cuando la distancia entre las partículas tiende a volverse muy pequeña?
e) ¿Qué sucede con la fuerza cuando la distancia entre las partículas se hace cero?

Solución.

a) Al sustituir los datos en la ecuación dada tenemos: $F_{(r)} = 9x10^9\frac{(12x10^{-6})(3x10^{-6})}{r^2}$

Realizando los productos indicados: $F_{(r)} = \frac{324x10^{-3}}{r^2}$

b) Representación gráfica



gráfica 2. 10

c) Cuando la distancia entre las partículas tiende a volverse muy grande (infinitamente grande) la fuerza F tiende a volverse muy pequeña (tiende a cero).

d) Cuando la distancia entre las partículas tiende a volverse muy pequeña (tiende a cero) la fuerza F tiende a volverse muy grande (infinitamente grande).

e) Cuando la distancia entre las partículas es de cero, entonces la función se indetermina, es decir, como el denominador se vuelve cero la función "no existe", esto queda representado gráficamente por la asíntota vertical.

2.2 Funciones con radicales

Aprendizajes:

- Explora problemas sencillos que se modelen con funciones con radicales
- Identifica los elementos de la función; dominio, rango, ceros y traza su gráfica.

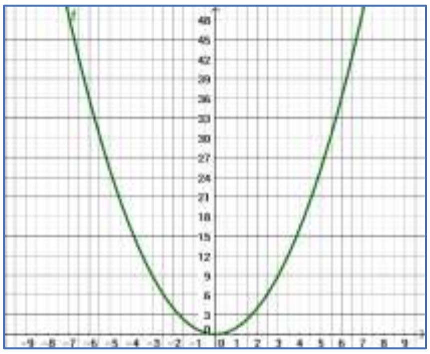
2.2.1 Funciones del tipo

Para determinar el dominio de una función con radical se debe tener en cuenta que será válido sólo para valores positivos, incluyendo el cero. Por lo tanto, se iguala el término del radical a cero, estableciendo los valores para los que existe la función.

No todas las funciones intersectan a los ejes coordenados, para saber si eso ocurre cuando f(x)=0 sabemos que intersecta al eje x, y cuando x=0 verificamos si la función intersecta al eje Y.

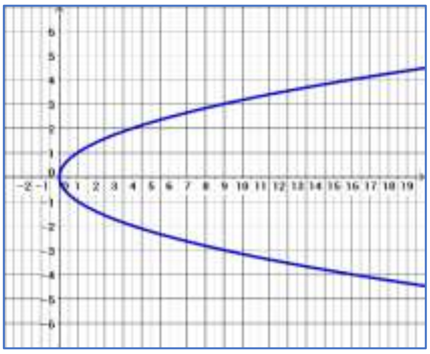
En esta unidad revisaremos dos tipos de funciones con radicales $f(x) = \sqrt{ax + b} + c$ y $g(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} + d$ con a, b, c y d reales, como sabemos que no existen raíces negativas debemos tener cuidado al determinar su dominio.

Para entender el comportamiento de la gráfica de una función con radical, podemos tomar como referencia la función $y = x^2$, de donde se obtiene una parábola vertical con vértice en (0,0) como se muestra en la figura 1, por lo tanto, $y^2 = x$ genera una parábola horizontal (figura 2).



gráfica 2. 11

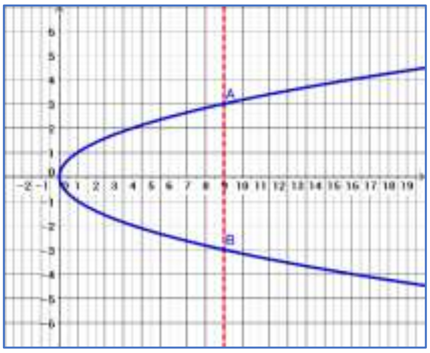
$y = x^2$



gráfica 2. 12

$y^2 = x$

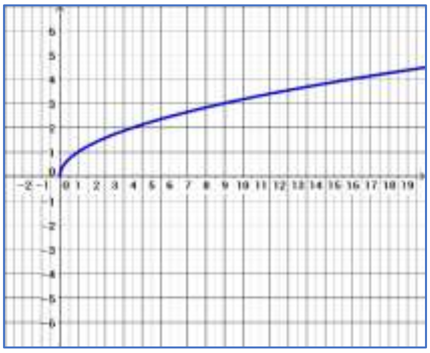
De acuerdo a la definición de función, sabemos que $y^2 = x$ no cumple con dicho concepto ya que si se traza una recta vertical se obtienen dos puntos para un mismo valor, por ejemplo, para x=9 se tiene que y=3 y al mismo tiempo que y=-3, (gráfica 2.13),



gráfica 2. 13

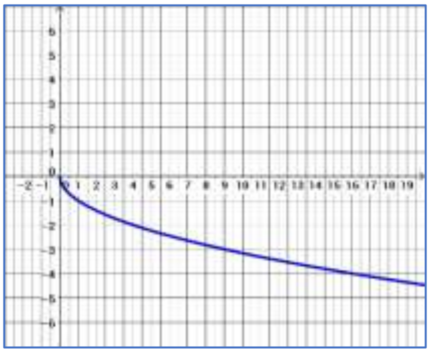
$y^2 = x$

Para que se pueda trabajar como función primero se aplica raíz cuadrada de ambos lados de la expresión y se obtiene $y = \pm\sqrt{x}$, se divide la parábola en dos partes, considerando la parte superior de la parábola como la función positiva $y = \sqrt{x}$ (gráfica 2.14) y la parte negativa corresponde a la parte inferior $y = -\sqrt{x}$, (gráfica 2.15).



gráfica 2. 14

$y = \sqrt{x}$



gráfica 2. 15

$y = -\sqrt{x},$

Otro aspecto importante que analizar es considerar el signo del coeficiente de x, si es positivo abrirá hacia la derecha y en caso contrario a la izquierda, esto se revisará más adelante en los ejemplos que se presentan. Por último, considerando que la gráfica de una función de la forma $f(x) = \sqrt{ax+b} + c$ corresponde a la mitad de una parábola horizontal, comenzaremos determinando el vértice de dicha parábola, misma que nos permitirá determinar el dominio de la función.

Ejemplo 1.

$$f(x) = \sqrt{2x+10} - 4$$

Para hallar el vértice la coordenada en x se obtiene al calcular $ax + b = 0$ y coordenada en y será c.

$$2x + 10 = 0$$
$$2x = -10$$
$$x = -\frac{10}{2}$$
$$x = -5$$

El vértice es (-5,-4), a partir de este punto podremos conocer el dominio y rango, como mencionamos anteriormente la función es positiva, por lo que será la parte superior de la parábola y como el coeficiente de x es positivo la gráfica abrirá hacia la derecha.

D: $[-5, \infty)$

R: [-4,∞).

Para saber si la función intersecta al eje x igualamos f(x)=0

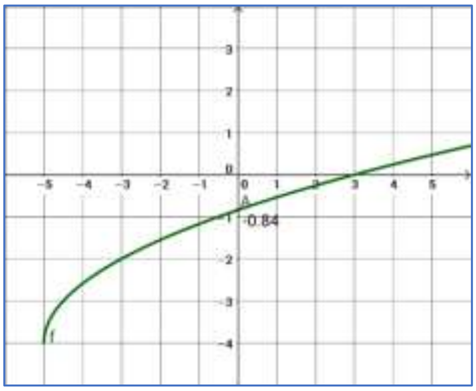
$$0 = \sqrt{2x+10} - 4$$
$$4 = \sqrt{2x+10}$$
$$(4)^2 = \left(\sqrt{2x+10}\right)^2$$
$$16 = 2x + 10$$
$$16 - 10 = 2x$$
$$6 = 2x$$
$$\frac{6}{2} = x$$
$$3 = x$$

La función intersecta al eje x en x=3

Para saber si la función intersecta al eje f(x) evaluamos x=0

$$f(x) = \sqrt{2(0)+10} - 4$$
$$f(x) = \sqrt{10} - 4$$
$$f(x) = -0.837$$

La gráfica de f(x)=$\sqrt{2x+10} - 4$ es:



gráfica 2. 16

Ejemplo 2.

$$g(x) = -\sqrt{3x - 9} + 2$$

Igualando al cero el término del radical para considerar su dominio

$$3x - 9 = 0$$
$$3x = 9$$
$$x = \frac{9}{3}$$
$$x = 3$$

El vértice está en (3,2) la función es negativa por lo que será la parte interior de la parábola y el coeficiente de x es positivo abrirá hacia la derecha.

D: $[3, \infty)$

R: $(-\infty, 2]$.

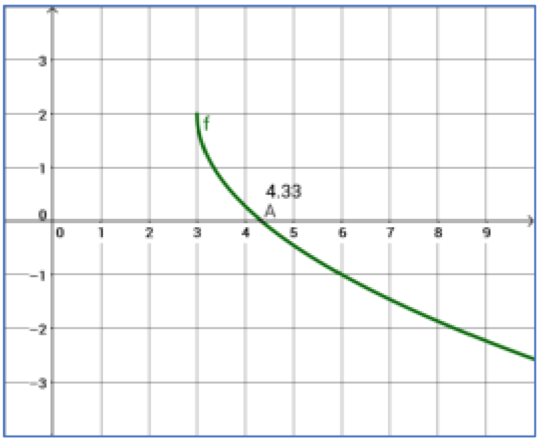
Para saber si la función intersecta al eje x igualamos g(x)=0

$$g(x) = -\sqrt{3x - 9} + 2$$
$$\sqrt{3x - 9} = 2$$
$$\left(\sqrt{3x - 9}\right)^2 = (-2)^2$$
$$3x - 9 = 4$$
$$3x = 4 + 9$$
$$3x = 13$$
$$x = \frac{13}{3}$$
$$x = 4.33$$

Para saber si la función intersecta al eje y evaluamos x=0

$$g(0) = -\sqrt{3(0) - 9} + 2$$
$$g(0) = -\sqrt{-9} + 2$$

Como no existe raíces negativas entonces la función no cruza al eje y su gráfica es:



gráfica 2. 17

Ejemplo 3.

$$h(x) = -\sqrt{8 - 4x} + 4$$
$$8 - 4x = 0$$
$$8 = 4x$$
$$\frac{8}{4} = x$$
$$2 = x$$

El vértice está en (2,4) la función negativa indica que será la parte inferior de la parábola y el negativo del coeficiente de x significa que abrirá hacia la izquierda.

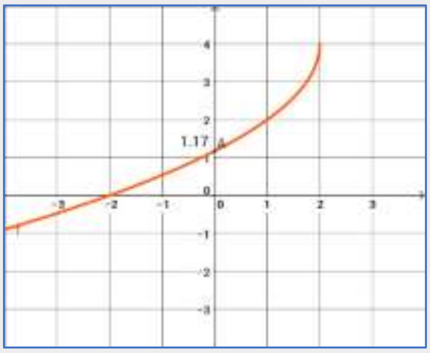
D: $(-\infty, 2]$ **R:** $(-\infty, 4]$.

Para buscar la intersección con el eje x, hacemos h(x)=0

$$0 = -\sqrt{8 - 4x} + 4$$
$$\sqrt{8 - 4x} = 4$$
$$\left(\sqrt{8 - 4x}\right)^2 = (4)^2$$
$$8 - 4x = 16$$
$$-4x = 16 - 8$$
$$-4x = 8$$
$$x = \frac{8}{-4}$$
$$x = -2$$

La función intersecta al eje x en x=-2. Ahora buscamos la intersección con el eje y evaluando x=0.

$$h(0) = -\sqrt{8 - 4(0)} + 4$$
$$h(0) = -\sqrt{8} + 4$$
$$h(0) = 1.17$$



gráfica 2. 18

Ejemplo 4.

$$\boldsymbol{i(x) = \sqrt{3-2x} - 4}$$

$$\boldsymbol{3 - 2x = 0}$$

$$\boldsymbol{3 = 2x}$$

$$\boldsymbol{\frac{3}{2} = x}$$

$$\boldsymbol{1.5 = x}$$

El vértice está en (1.5, -4), la función positiva es la parte superior de la parábola y el coeficiente negativo indica que abre hacia la izquierda.

D: $(-\infty, \mathbf{1.5}]$

R: $[\mathbf{-4}, \infty)$**.**

Hallaremos el punto de intersección con el eje x haciendo i(x)=0

$$\boldsymbol{0 = \sqrt{3-2x} - 4}$$

$$\boldsymbol{4 = \sqrt{3-2x}}$$

$$\boldsymbol{(4)^2 = \left(\sqrt{3-2x}\right)^2}$$

$$\boldsymbol{16 = 3 - 2x}$$

$$\boldsymbol{16 - 3 = -2x}$$

$$13 = -2x$$

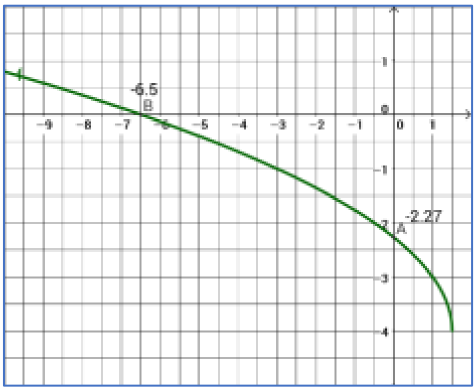
$$\frac{13}{-2} = x$$

$$-6.5 = x$$

Hallemos la intersección con el eje vertical evaluando x=0.

$$i(0) = \sqrt{3 - 2(0)} - 4$$

$$i(x) = \sqrt{3} - 4 = -2.26$$



gráfica 2. 19

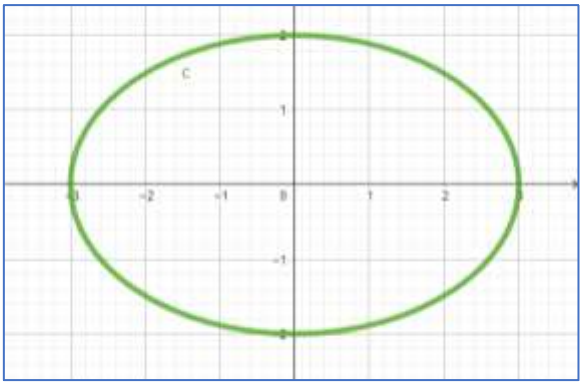
Ejercicio 2.3.

Grafica las siguientes funciones y determina dominio, rango y sus respectivas intersecciones con los ejes coordenados.

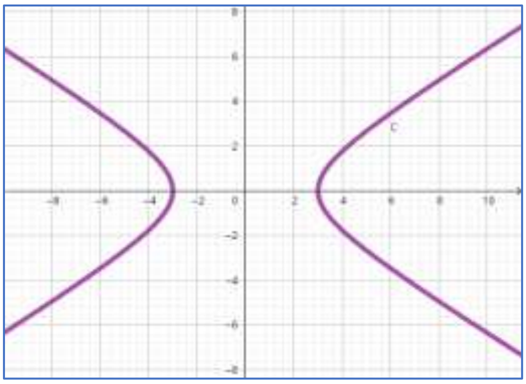
$f(x) = \sqrt{3x+18}$ $\qquad g(x) = \sqrt{4-8x} - 3$ $\qquad h(x) = -\sqrt{4x-12} + 5$ $\qquad i(x) = \sqrt{10-2x} - 2$

Ahora veamos funciones con radicales del tipo $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} + d$, en donde obtendremos semielipses cuando a<0 o semihipérbolas para a>0. Nuevamente el signo de la función nos indicará si es la parte superior cuando es negativo y viceversa.

Como recordatorio tenemos la gráfica 2.20 que representa una elipse que se estudia en matemáticas III y la gráfica 2.21 la hipérbola que se revisó en las funciones racionales.



gráfica 2. 20 **Elipse**



gráfica 2. 21 **Hipérbola**

Los puntos de partida para realizar nuestras gráficas será x_1 y x_2 al resolver la ecuación cuadrática del radical y el término d, es decir, los puntos serán (x_1,d) y (x_2,d), dichos puntos serán los vértices de la semielipse o semihipérbola, según sea el caso.

Ejemplo 1.

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x} + 5$$

Comenzaremos igualando a 0 el término del radical.

$$2x^2 + 7x = 0$$

Factorizando x

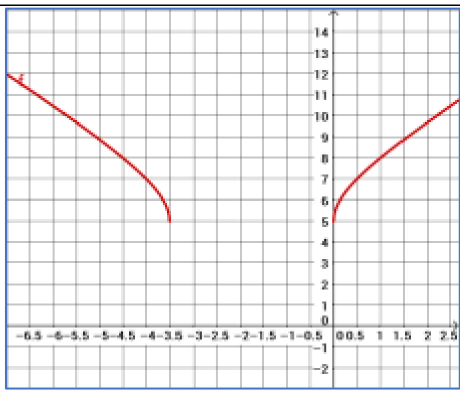
$$x(2x + 7) = 0$$

$$x_1 = 0 \;\; y \quad 2x + 7 = 0$$

$$2x = -7$$

$$x_2 = \frac{-7}{2} = -3.5$$

Obtenemos dos puntos que serán (0,5) y (-3.5, 5), el coeficiente a>0 se obtendrá la mitad de las ramas de una hipérbola y como la función es positiva en la gráfica tendremos la parte superior de dichas ramas, como se muestra a continuación.



gráfica 2. 22

La gráfica no intersecta al eje x por lo tanto no es necesario realizar ningún cálculo adicional. Nuevamente los vértices nos servirán como referencia para hallar el dominio y rango correspondiente, en este caso el dominio es $(-\infty, -3.5]U[0, \infty)$, mientras que el rango es $[5, \infty)$

Ejemplo 2.

$$g(x) = -\sqrt{2x^2 - 7x + 3} + 2$$

Utilizaremos la fórmula general para resolver el término cuadrático dentro del radical.

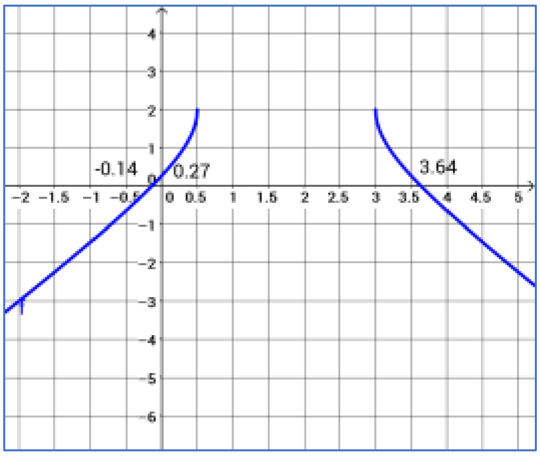
$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)}$$

De donde se obtiene que:

$$x_1 = 0.5 \; y \quad x_2 = 3$$

Los puntos de partida serán (0.5, 2) y (3,2), como a>0 y la función negativa la gráfica corresponderá a las ramas inferiores de una hipérbola, como se observa a continuación.



gráfica 2. 23

El dominio es $(-\infty, 0.5]U[3, \infty)$, mientras que el rango es $(-\infty, 2)$. Para calcular las intersecciones con los ejes coordenados primero igualamos a cero la función.

$$0 = -\sqrt{2x^2 - 7x + 3} + 2$$

$$\sqrt{2x^2 - 7x + 3} = 2$$

$$\left(\sqrt{2x^2 - 7x + 3}\right)^2 = (2)^2$$

$$2x^2 - 7x + 3 = 4$$

$$2x^2 - 7x - 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática con fórmula general.

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)}$$

Se obtiene que:

$$x_1 = -0.14 \; y \quad x_2 = 3.64$$

Cuando evaluamos x=0 se obtendrá la intersección con el eje y

$$g(0) = -\sqrt{2(0)^2 - 7(0) + 3} + 2$$

$$g(0) = -\sqrt{3} + 2 = 0.26$$

Ejemplo 3.

$$h(x) = -\sqrt{50 - 2x^2} + 4$$

Para hallar los puntos de partida, igualamos el término del radical

$$50 - 2x^2 = 0$$

$$50 = 2x^2$$

$$\frac{50}{2} = x^2$$

$$25 = x^2$$

$$\sqrt{25} = \sqrt{x^2}$$

$$\pm 5 = x$$

$$x_{1=} - 5 \; y \; x_2 = 5$$

Los vértices son (-5,4) y (5,4), como el coeficiente cuadrático es negativo, se trata de una semielipse, la función es negativa, entonces corresponde a la parte inferior de la semielipse.

Para hallar el punto de intersección con el eje vertical evaluamos x=0

$$h(0) = -\sqrt{50 - 2(0)^2} + 4$$

$$h(0) = -\sqrt{50} + 4$$

$$h(0) = -3.07$$

$$50 - 2x^2 = 16$$

$$50 - 16 = 2x^2$$

$$34 = 2x^2$$

$$\frac{34}{2} = x^2$$

$$\pm\sqrt{17} = x$$

$$\pm 4.12 = x$$

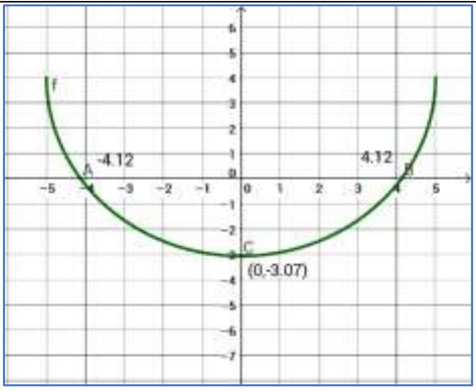
Para determinar el dominio haremos uso de los vértices y para el dominio requerimos encontrar el centro de la elipse (punto medio entre x_1 y x_2) y evaluar en la función para encontrar el vértice correspondiente al eje menor.

Como $x_{1=} - 5 \; y \; x_2 = 5$ entonces, $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-5+5}{2} = \frac{0}{2} = 0$, $h(0) = -\sqrt{50 - 2(0)^2} + 4$, donde $h(0) = -3.07$.

Por lo tanto, el dominio es $[-5{,}5]$ y el rango [-3.07,4].

Las raíces se calcularán igualando la h(x)=0.

$$h(x) = -\sqrt{50-2x^2}+4$$
$$0 = -\sqrt{50-2x^2}+4$$
$$\sqrt{50-2x^2} = 4$$
$$\left(\sqrt{50-2x^2}\right)^2 = (4)^2$$



gráfica 2. 24

Ejemplo 4.

$$i(x) = \sqrt{-x^2+5x-4}-1$$
$$-x^2+5x-4=0$$
$$x^2-5x+4=0$$
$$(x-4)(x-1)=0$$
$$x_{1=}4 \; y \; x_2 = 1$$

Nuevamente el coeficiente a<0 por lo tanto será una semielipse superior porque la función es positiva, con vértices en (4,-1) y (1,-1),

Para hallar el punto de intersección con el eje y, evaluamos x=0.

$$i(0) = \sqrt{-(0)^2+5(0)-4}-1$$
$$i(0) = \sqrt{-4}-1$$

El número imaginario nos indica que la función i(x) no intersecta al eje y.

La intersección con el eje x, se obtendrá al hacer i(x)=0

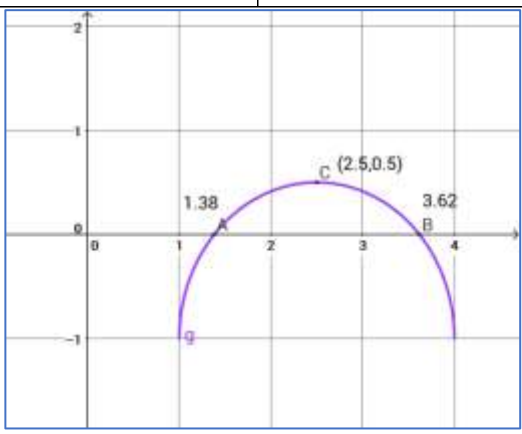
$$0 = \sqrt{-x^2+5x-4}-1$$
$$1 = \sqrt{-x^2+5x-4}$$
$$(1)^2 = \left(\sqrt{-x^2+5x-4}\right)^2$$
$$1 = -x^2+5x-4$$
$$0 = -x^2+5x-5$$

Resolviendo por fórmula general:

$$x = \frac{-(5)\pm\sqrt{(5)^2-4(-1)(-5)}}{2(-1)}$$
$$x = \frac{-5\pm\sqrt{5}}{-2}$$
$$x_{1=}1.38 \; y \; x_2 = 3.62$$

El dominio es [1,4], para le rango necesitamos calcular el punto medio, $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$, evaluando

$i(2.5) = \sqrt{-(2.5)^2+5(2.5)-4}-1 = 0.5$, entonces el rango es [-1,0.5].



gráfica 2. 25

Ejercicio 2.4

Grafica las siguientes funciones y determina dominio, rango y sus respectivas intersecciones con los ejes coordenados.

a) $f(x) = -\sqrt{x^2 + 3x - 10} + 3$
b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 36} - 3$
c) $h(x) = \sqrt{-4x^2 - 44x} + 2$

Problemas de Aplicación de funciones con radicales

1. La función que modela el volumen V de un cilindro circular recto de altura constante de 2 m y radio r es $V = \pi r^2 h$.
   a) Expresar el volumen V como una función del radio r.
   b) Trazar la gráfica correspondiente para valores del volumen V de 0 a 10 litros.
   c) Si necesitamos almacenar 5 litros de agua, en el cilindro, ¿cuál sería su radio?

Solución.

a) Para expresar el volumen V como una función del radio r, se despeja r.

$$\frac{V}{\pi h} = \frac{\pi r^2 h}{\pi h}$$

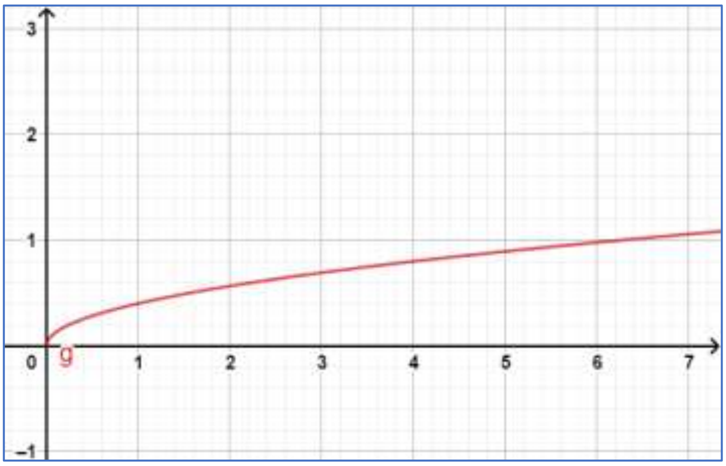
$$\frac{V}{\pi h} = r^2$$

$$\sqrt{\frac{V}{\pi h}} = \sqrt{r^2}$$

$$r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}} \quad como\ h = 2$$

$$r_{(V)} = \sqrt{\frac{V}{2\pi}}$$

b) Aplicando el método para graficar se obtiene:



gráfica 2. 26

c) Para calcular el valor del radio pedido, sustituimos el valor de V = 5 y h = 2 en la función y realizando las operaciones indicadas:

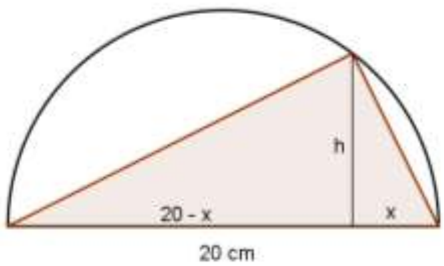
$$r = \sqrt{\frac{5}{2\pi}}$$

$$r \approx 0.9\,m$$

2. Se inscribe un triángulo en una semicircunferencia de forma que uno de los lados del triángulo es el diámetro de la semicircunferencia. Si el diámetro de la semicircunferencia es de 20 cm:
   a) Determina una función que modele el área del triángulo en función de la base x.
   b) Traza la gráfica correspondiente, a partir de la función obtenida.
   c) Determina el dominio de acuerdo las condiciones del problema.
   d) Calcula las dimensiones del triángulo para obtener el área máxima.

Solución.

a) Trazamos la figura correspondiente.



De esta figura podemos obtener dos conclusiones:

- Debido a que uno de los lados del triángulo corresponde al diámetro de la semicircunferencia, el triángulo es rectángulo.

- La altura trazada a partir del ángulo recto de un triángulo rectángulo es media proporcional a los segmentos lados que forma al pie de la altura.

En base a lo anterior, tenemos: $\frac{20-x}{h} = \frac{h}{x}$

Despejamos h $(xh)\left(\frac{20-x}{h}\right) = (xh)\left(\frac{h}{x}\right)$

$$h^2 = (20-x)(x)$$

$$\sqrt{h^2} = \sqrt{-x^2 + 20x}$$

$$h = \sqrt{-x^2 + 20x}$$

En la fórmula para el área del triángulo: $A = \frac{bh}{2}$

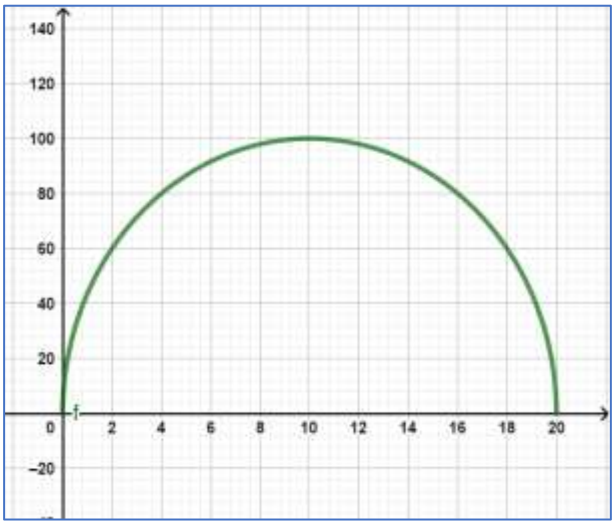
Sustituimos los valores de base y altura: $A = \frac{(20)\left(\sqrt{-x^2+20x}\right)}{2}$

$$A = 10\sqrt{-x^2 + 20x}$$

Introduciendo al radical el coeficiente
y realizando el producto indicado: $A = \sqrt{100(-x^2 + 20x)}$

$$A = \sqrt{-100x^2 + 2{,}000x}$$

b) Su gráfica es:



gráfica 2. 27

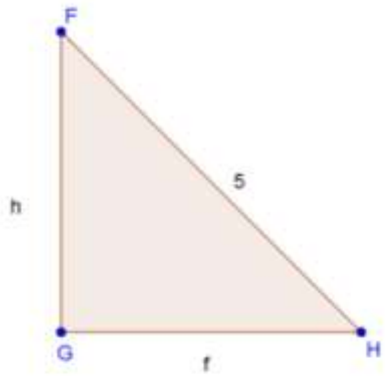
c) De acuerdo con las condiciones del problema y apoyándonos en la gráfica anterior, podemos observar que el valor de x debe ser más grande que cero y no debe de llegar a los 10 cm, por lo tanto, el dominio de la función es: $0 < x < 10$.

d) A partir de la gráfica podemos apreciar que el valor que aproxima el punto máximo de la función está en x = 10 cm. Si sustituimos el valor de x en una de las expresiones iniciales $h = \sqrt{-x^2 + 20x}$ tenemos $\sqrt{-(10)^2 + 20(10)} = h$, es decir, h = 10 cm. En conclusión, las dimensiones del triángulo son de 20 cm de base, 10 cm de altura y los dos lados oblicuos miden $10\sqrt{2}$ cm. Estas longitudes producen un área máxima de 100 cm^2.

3. En un triángulo rectángulo, se mantiene constante la longitud de la hipotenusa y las longitudes de los catetos son variables.
   a) Expresa el Teorema de Pitágoras, como una función de sus catetos.
   b) Realiza la gráfica de la función resultante.
   c) Establece el dominio de acuerdo con las condiciones del problema.

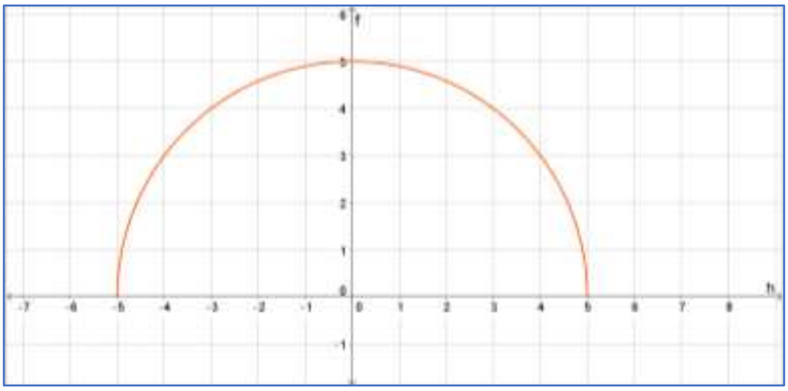
Solución.

a) Trazamos la figura solicitada y planteamos el Teorema de Pitágoras



$$f^2 + h^2 = 5^2$$
$$f^2 + h^2 - h^2 = 5^2 - h^2$$
$$\sqrt{f^2} = \sqrt{25 - h^2}$$
$$f = \sqrt{25 - h^2}$$

b) Representación gráfica.



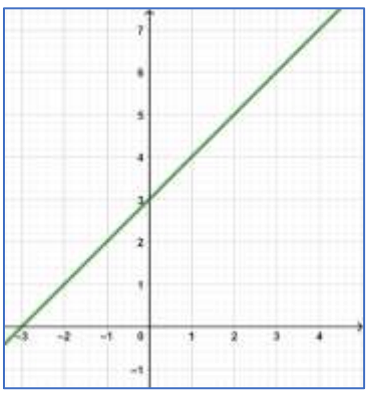
gráfica 2. 28

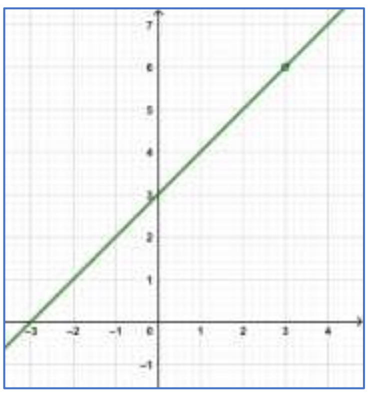
c) De acuerdo a las condiciones del problema y apoyándonos en la gráfica anterior, podemos observar que el valor de h debe ser más grande que cero y no debe de llegar a los 5, por lo tanto, el dominio de la función es: $0 < h < 5$.

Ejercicio 2.5

1. El costo (C), en millones de pesos, por remover p% de contaminantes que se descargan al agua de un río es: $C = \frac{-25500}{p-100} - 225$
   a) Hallar el costo por remover 10%, 40% y 75% de los contaminantes.
   b) De acuerdo al modelo, ¿sería posible remover el 100% de contaminantes?
   c) Traza la gráfica aproximada de la función dada.

2. A continuación, se presentan dos gráficas. Una es la gráfica de $f_{(x)} = \frac{x^2-9}{x-3}$ y la otra es la gráfica de $g_{(x)} = x + 3$. Determina cuál gráfica corresponde a $f_{(x)}$ y cuál a $g_{(x)}$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

a) 

b) 

3. Una empresa generadora de energía eléctrica quema carbón para generar electricidad. El costo C (en pesos) de eliminar p% de contaminantes de la chimenea está dado por $C = \frac{80,000p}{100-p}$ para $0 \leq p < 100$. Un miembro de la legislatura estatal que considera que requeriría que la empresa eliminara 90% de los contaminantes de sus emisiones en chimeneas. La ley actual requiere la remoción de 85%. ¿Cuánto costo adicional tendría la compañía como resultado de la nueva ley?

4. Un tanque de 1,000 litros contiene 50 litros de una solución de salmuera al 25%. Se agregan x litros de una solución de salmuera al 75% al tanque.
   a) Demuestra que la concentración C, la proporción de salmuera y la solución total, en la mezcla final están definidos por la función: $C = \frac{3x+50}{4(x+50)}$
   b) Determina el dominio de la función basado en las restricciones físicas del problema.
   c) Traza la gráfica de la función de la concentración.
   d) A medida que el tanque se llena, ¿qué ocurre con la proporción a la que está aumentando la concentración de salmuera? ¿A qué porcentaje parece calmarse la concentración de salmuera?

5. Una compañía produce componentes electrónicos para televisores. Según sus registros un nuevo empleado puede ensamblar en promedio $N_{(t)}$ componentes por día, después de t días de capacitación, como está dada por $N_{(t)} = \frac{50t}{t+4} \quad t \geq 0$
   a) Traza la gráfica de N, ¿a qué valor tiende N conforme $t \to \infty$?

6. La cantidad de bacterias en un cultivo, en el momento t, se determina con la función: $n_{(t)} = 10,000\left(\frac{3t^2+1}{t^2+1}\right)$
   a) Cuando el tiempo avanza, ¿se estabiliza el tamaño de la colonia de bacterias?
   b) Si la respuesta del inciso a) es sí, ¿cuál es el tamaño estable?
   c) ¿Cuánto tiempo transcurre para que la cantidad de bacterias sea mayor que 22,000?

7. Un medicamento inyectado, en la sangre produce una concentración de $c_{(t)} = \frac{at}{t^2+b}$ en ml cuando $t \geq 0$ medido en horas. Las constantes a y b dependen del medicamento que se trate.
   a) Traza la gráfica de la función para varios valores de a y b. ¿Cómo influyen a y b en la gráfica?
   b) Cuando a = 3 y b = 1, determina en forma aproximada la máxima concentración del medicamento en la sangre
   c) ¿Qué sucede con la concentración del medicamento en la sangre cuando t se hace grande?

d) Para a =3 y b = 1, determina cuánto tarda en disminuir la concentración del medicamento por debajo de 0.2

8. Una población se calcula, en el momento t, con $P_{(t)} = \frac{at^2}{t^2+1}$ donde a es la constante determinada por la especie de que se trate.
   a) Grafica $P_{(t)}$, para distintas opciones de (a), y describe el efecto que tiene este parámetro sobre la curva.
   b) ¿Qué sucede con la población, cuando t aumenta de forma infinita?

9. La fórmula para obtener el área A de un cuadrado es $A = l^2$donde *l* es la longitud del lado del cuadrado.
   a) Expresa la longitud en función del área.
   b) Traza la gráfica correspondiente.
   c) Determina el dominio de la función, a partir de la situación física.

Autoevaluación. Funciones Racionales y con Radicales

Grafica cada una de las siguientes funciones, encuentra los puntos de intersección con los ejes e indica dominio y rango.

I. $f(x) = \frac{-8}{2x-16}$

II. $g(x) = \frac{16-4x}{2x+8}$

III. $h(x) = \frac{2x^2-18}{x^2-5x+6}$

IV. $i(x) = \sqrt{3x+9} - 2$

V. $j(x) = \sqrt{25-x} - 4$

VI. $k(x) = -\sqrt{x^2-10x+9} + 3$

Soluciones a los ejercicios de la unidad II.

Ejercicio 2.1

De las siguientes funciones racionales, llena la tabla de valores; determina el dominio y rango; e indica en qué valor(es) de x y en qué valor(es) de y no hay gráfica, es decir, hay ruptura de la gráfica.

x	f(x)
0	
1	
1.5	
2	indeterminado
2.5	
3	indeterminado
3.5	
4	

a) $f(x) = \frac{2}{(x-2)(x-3)}$

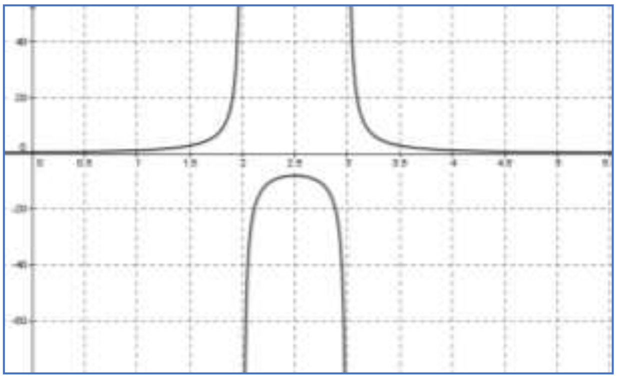
D: $(-\infty, 2)u(2,3)u(3, \infty)$

Para hallar el rango se evalúa el punto máximo que se observa en la gráfica en x=2.5

$$f(2.5) = \frac{2}{(2.5-2)(2.5-3)}$$

$$f(2.5) = -8$$

R: $(-\infty, -8)u(0, \infty)$



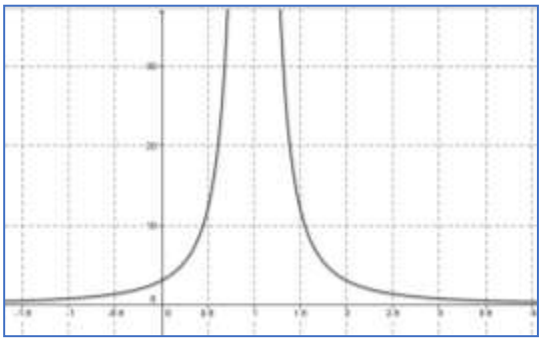
---

x	g(x)
-1	
0	
0.5	
1	indeterminado
1.5	
2	
2.5	

b) $g(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$

D: $(-\infty, 1)u(1, \infty)$

R: $(0, \infty)$



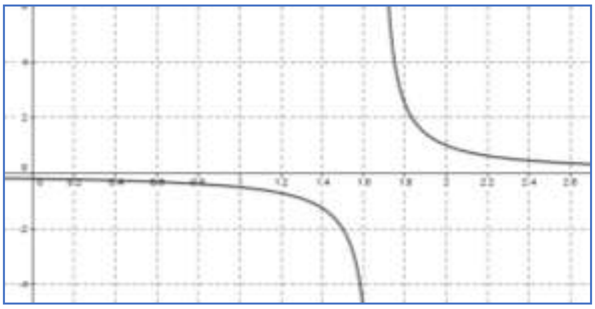
---

x	h(x)
0	
1	
1.5	
1.66	indeterminado
1.7	
2	

c) $h(x) = \frac{1}{3x-5}$

D: $(-\infty, 1.66)u(1.66, \infty)$

R: $(-\infty, 0)u(0, \infty)$

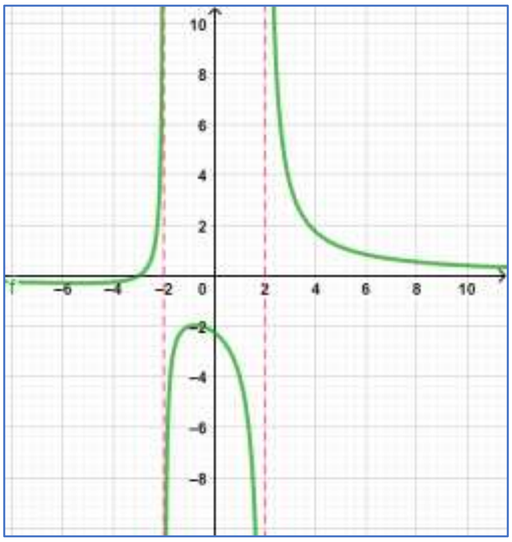


Ejercicio 2.2

Realiza un esbozo de gráfico de las siguientes funciones y determina las asíntotas, dominio, rango, etc.

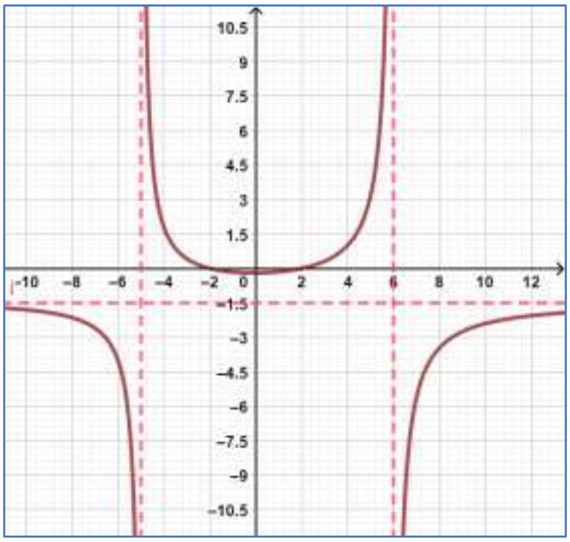
$$f(x) = \frac{3x + 9}{x^2 - 4}$$

Raíces: $3x + 9 = 0, x = 3$
A.V $x^2 - 4 = 0, x_1 = 2, x_2 = -2$
A.H. $f(x) = 0$
Intersección con el eje vertical $\left(0, -\frac{9}{4}\right)$
D: $(-\infty, -2)u(-2,2)u(2, \infty)$
Rango se observa que hay un máximo y un mínimo, pero no se sabe exactamente en donde por lo que se usa x_0 y x_1 en donde se define que $f(x_0)$ es el mínimo y $f(x_1)$ es el máximo de la función respectivamente.
R: $(-\infty, f(x_1))u(f(x_0), \infty)$



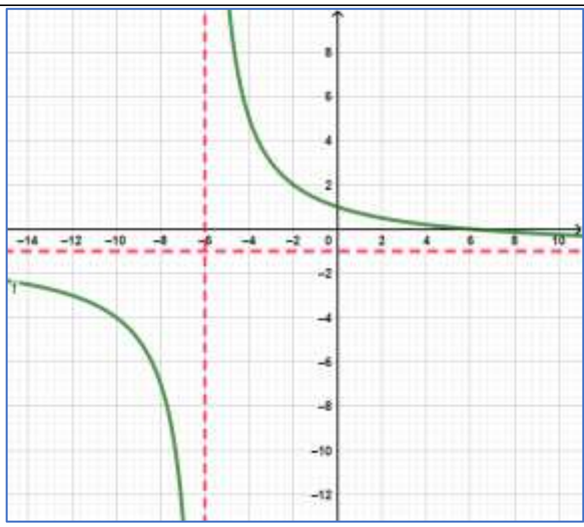
$$g(x) = \frac{-3x^2 + 12}{2x^2 - 2x - 60}$$

Raíces: $-3x^2 + 12 = 0, x_1 = 2, x_2 = -2$
A.V $2x^2 - 2x - 60 = 0, x_1 = -5, x_2 = 6$
A.H. $g(x) = -\frac{3}{2}$
Intersección con el eje vertical $\left(0, -\frac{12}{60}\right)$
D: $(-\infty, -5)u(-5,6)u(6, \infty)$
Se observa que hay un mínimo, pero no se sabe con exactitud en donde, por lo que se usa x_0 y se define a g(x_0) como el mínimo de la función respectivamente.
R: $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) u(g(x_0), \infty)$



$$h(x) = \frac{18 - 3x}{3x + 18}$$

Raíces: $18x - 3 = 0, x = 6$
A.V $3x + 18 = 0, x = -6$
A.H. $h(x) = -\frac{3}{3}$
Intersección con el eje vertical $\left(0, -\frac{18}{18}\right)$
D: $(-\infty, -6)u(-6, \infty)$
R: $(-\infty, -1)u(-1, \infty)$



$$i(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{4x^2 - 4}$$

Raíces: $x^2 - 3x - 4 = 0, x_1 = -1, x_2 = 4$

A.V $4x^2 - 4 = 0, x_1 = -1, x_2 = 1$

A.H. $i(x) = \frac{1}{4}$

Intersección con el eje vertical $\left(0, \frac{-4}{-4}\right)$

Como hay un hueco en la gráfica se escribe factorizada la función y se simplifica.

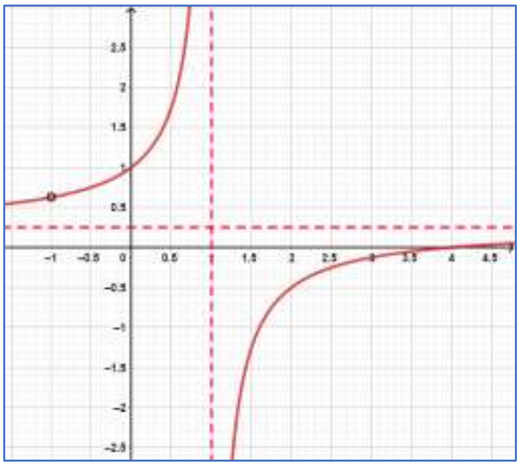
$$i(x) = \frac{(x-4)(x+1)}{4(x-1)(x+1)}$$

$$i(x) = \frac{x-4}{4(x-1)}$$

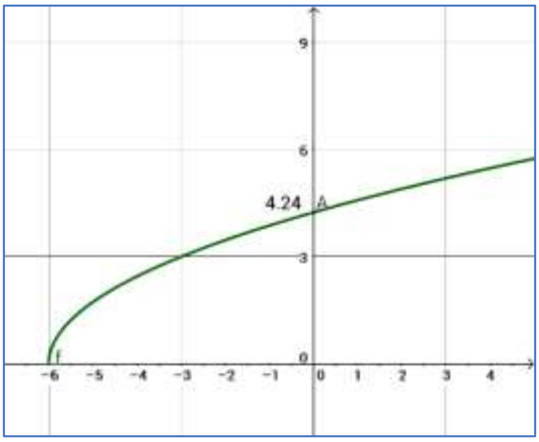
$$i(-1) = \frac{-1-4}{4(-1-1)} = \frac{-5}{-8} = 6.25$$

D: $(-\infty, -1)u(-1,1)u(1, \infty)$

R: $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right) u \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{8}\right) u \left(\frac{5}{8}, \infty\right)$



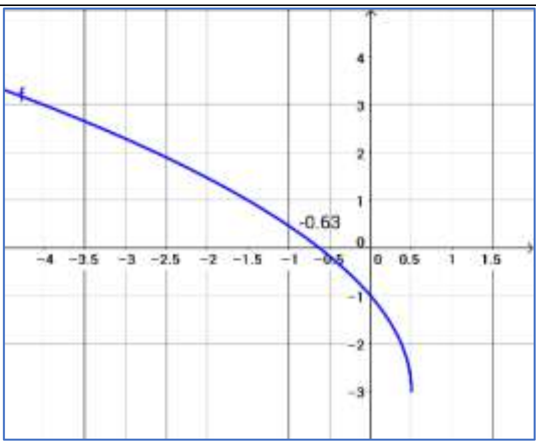
Ejercicio 2.3



a) $f(x) = \sqrt{3x + 18}$

D: $[-6, \infty)$

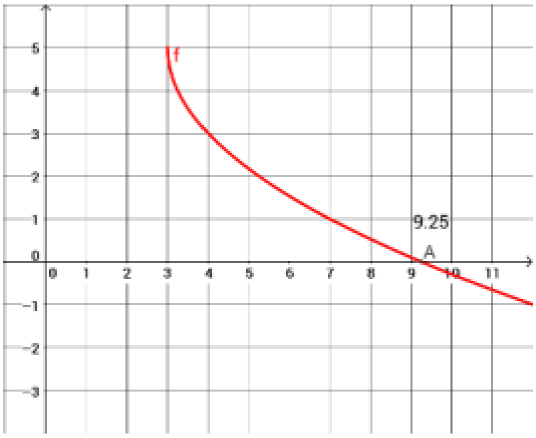
R: $[0, \infty)$



b) $g(x) = \sqrt{4 - 8x} - 3$

D: $(-\infty, 0.5)$

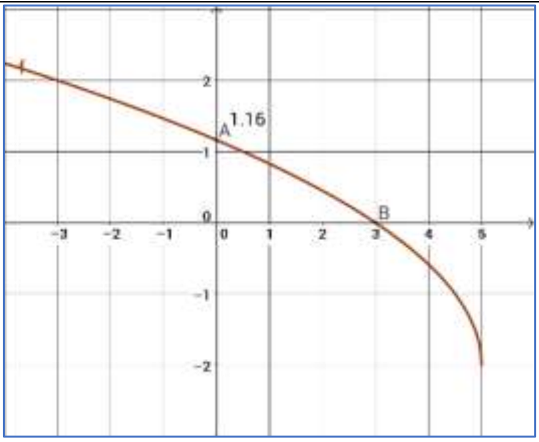
R: $[-3, \infty)$



c) $h(x) = -\sqrt{4x - 12} + 5$

D: $[3, \infty)$

R: $(-\infty, 5]$

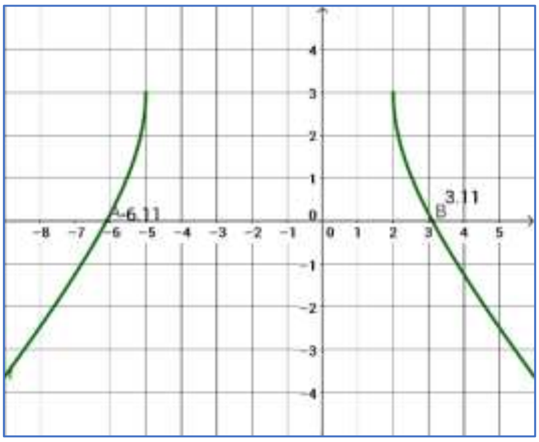


d) $i(x) = \sqrt{10 - 2x} - 2$

D: $(-\infty, 5]$

R: $[-2, \infty)$

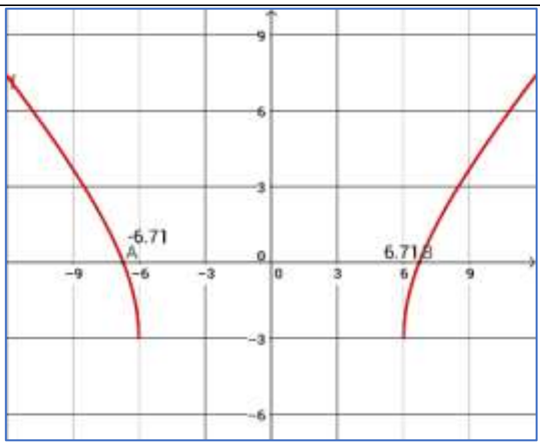
Ejercicio 2.4



a) $f(x) = -\sqrt{x^2 + 3x - 10} + 3$

D: $(-\infty, -5]U[2, \infty)$

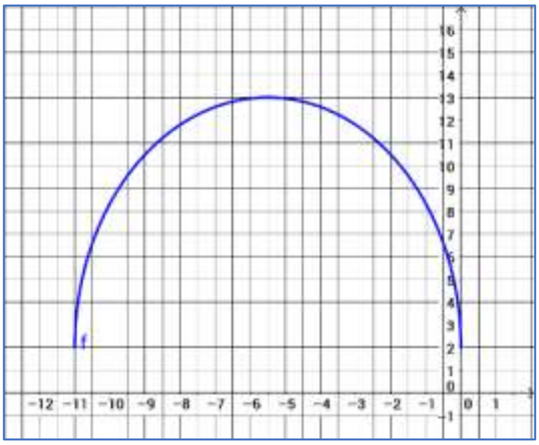
R: $(-\infty, 3]$



b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 36} - 3$

D: $(-\infty, -6]U[6, \infty)$

R: $[-3, \infty)$



c) $h(x) = \sqrt{-4x^2 - 44x} + 2$

D: $[-11,0]$

R: $[2,13]$

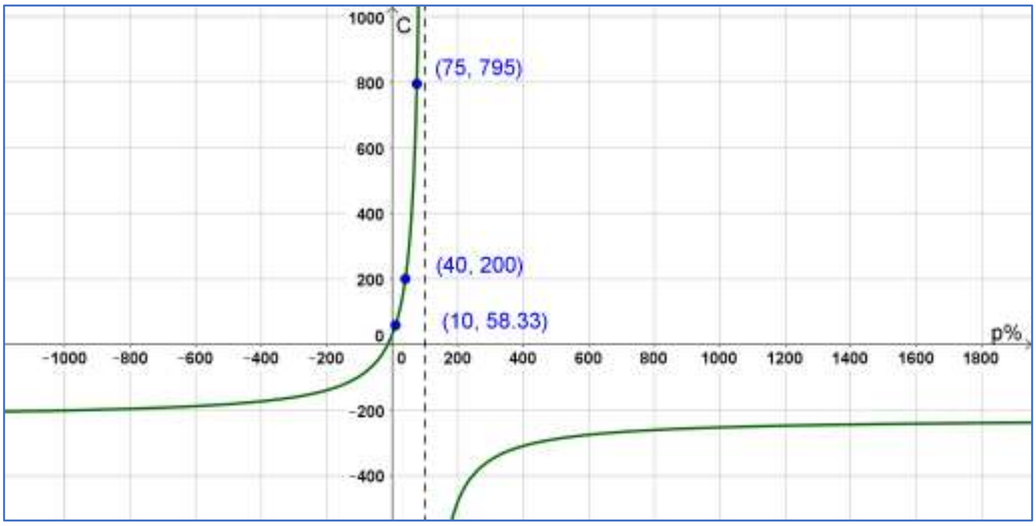
Ejercicio 2.5

1. a)

Contaminantes [%]	Costo [millones]
10	58.33
40	200
75	795

b) No, no es posible que limpien el 100% de los contaminantes del río.

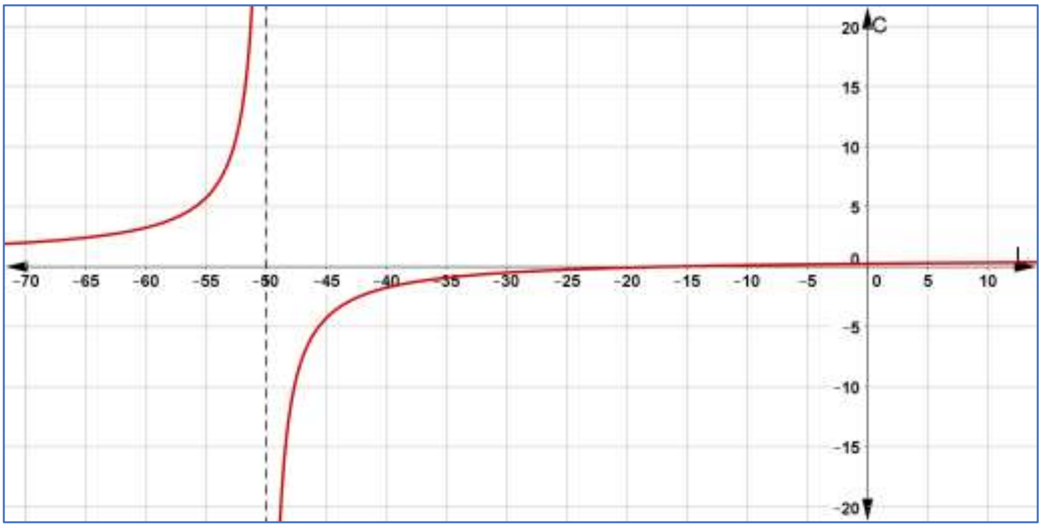
c)



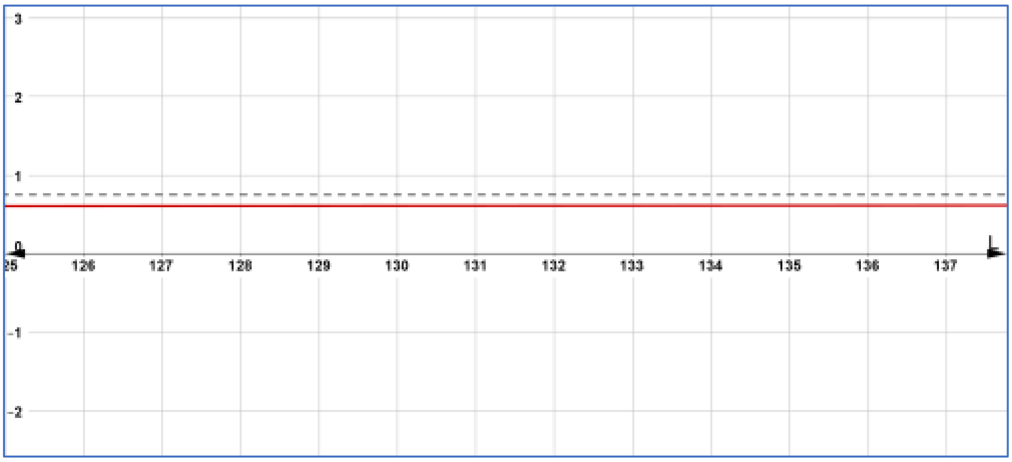
2. La gráfica de $f_{(x)}$ es la correspondiente al inciso b y la gráfica de $g_{(x)}$ es la correspondiente al inciso a.

3. El costo adicional que tendría la compañía como resultado de la nueva ley representaría $ 283,333 pesos.

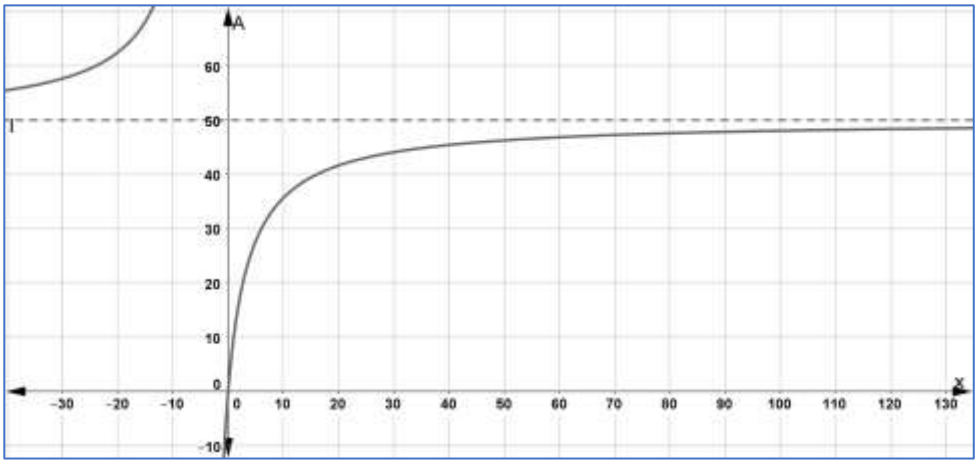
4. a) Queda pendiente al estudiante.
   b) El dominio de la función sería: [50,950)
   c) La gráfica resultante sería:



   d) Si realizamos un acercamiento a la gráfica anterior, podemos observar que la concentración se acerca al 75% de concentración.



5. En la gráfica podemos observar que el valor al cual tiende N conforme $t \to \infty$ es: N = 50 productos.



6. a) Sí, la población de bacterias sí se estabiliza.

   b) La colonia de bacterias se estabiliza hacia los 30, 000 individuos.

   c) Tiene que transcurrir al menos un día para que la colonia supere los 22, 000 individuos.

7. a) El parámetro (a) repercute directamente en la concentración de medicamento en la sangre, es decir, mientras más grande sea (a) mayor será la cantidad de medicamento en la sangre. El parámetro (b) repercute directamente en el tiempo que debe de pasar el medicamento en el torrente sanguíneo antas de alcanzar el mayor nivel de concentración en la sangre.

   b) Para los valores señalados la concentración de medicamento en la sangre es de 1.5 ml.

   c) Cuando el tiempo tiende a hacerse muy grande, la concentración de medicamento se reduce hasta hacerse muy pequeña, casi cero.

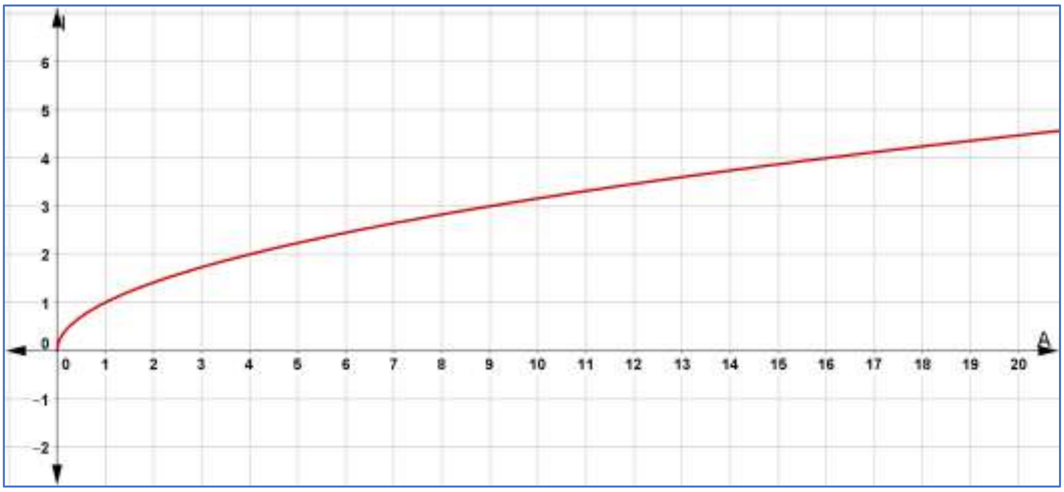
   d) Necesitan pasar por lo menos 15 horas, para que la concentración de medicamento se encuentre por debajo de las 0.2 ml.

8. a) El parámetro (a) tiene como función marcar la posición de una asíntota horizontal, es decir, marca la población inicial, por lo tanto, la curva siempre va a iniciar y se va a mantener por debajo y del valor de (a).

   b) Cuando la variable de tiempo se vuelva muy grande la población habrá aumentado hasta crecer lo suficiente sin superar, la población inicial.

9. a) $l = \sqrt{A}$

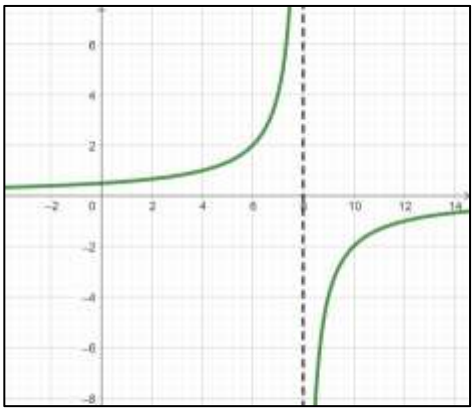
   b)



c) El dominio de la función sería (0, ∞)

Solución a la autoevaluación de la unidad II.

I.



$$f(x) = \frac{-8}{2x - 16}$$

Intersección eje de las abscisas

No hay

Intersección eje de ordenadas

$$\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$D: (-\infty, 8)u(8, \infty)$

$R: (-\infty, 0)u(0, \infty)$

II. $g(x) = \frac{16-4x}{2x+8}$

Intersección eje de las abscisas

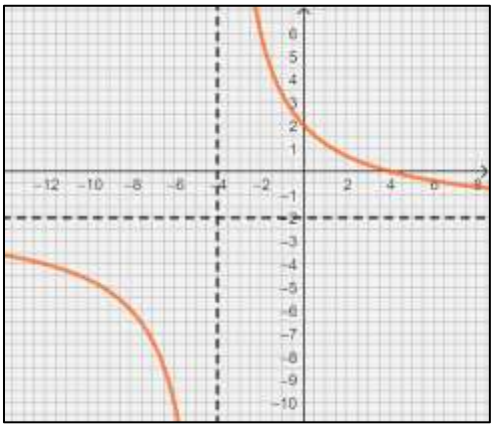
$(4,0)$

Intersección eje de ordenadas

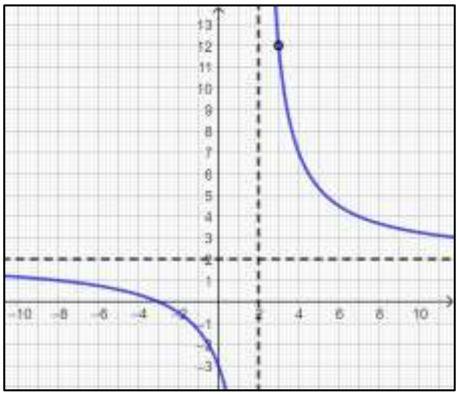
$(0,2)$

$D: (-\infty, -4)u(-4, \infty)$

$R: (-\infty, 2)u(2, \infty)$



III.



$$h(x) = \frac{2x^2 - 18}{x^2 - 5x + 6}$$

Intersección eje de las abscisas

$(-3,0)$

Intersección eje de ordenadas

$(0,-3)$

Hay un hueco en

$(3,12)$

$D: (-\infty, 2)u(2,3)u(3, \infty)$

$R: (-\infty, 2)u(2,12)u(12, \infty)$

IV. $i(x) = \sqrt{3x+9} - 2$

Intersección eje de las abscisas

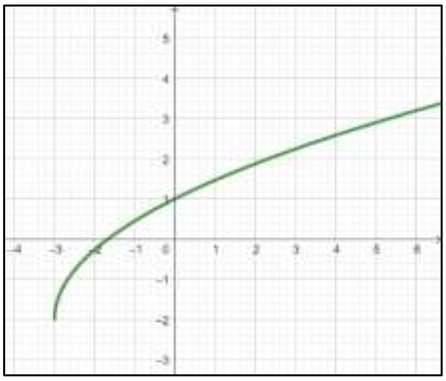
$\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$

Intersección eje ordenadas

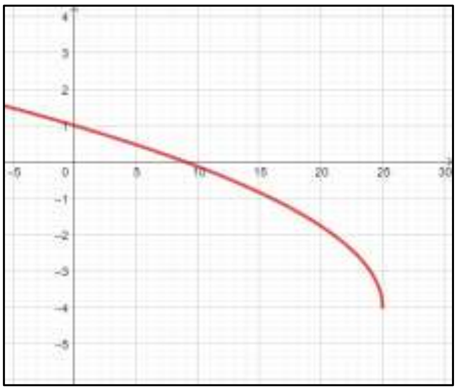
$(0,1)$

$D: (-3, \infty)$

$R: (-2, \infty)$



V.



$j(x) = \sqrt{25-x} - 4$

Intersección eje de las abscisas

$(9,0)$

Intersección eje ordenadas

$(0,1)$

$D: (-\infty, 25)$

$R: (-4, \infty)$

VI. $k(x) = -\sqrt{x^2 - 10x + 9} + 3$

Intersección eje de las abscisas

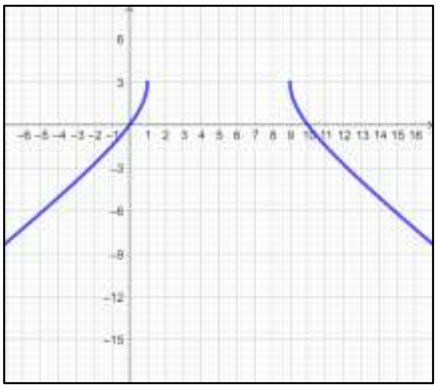
$(0,0)\ y\ (10,0)$

Intersección eje ordenadas

$(0,0)$

$D: (-\infty, 1) u (9, \infty)$

$R: (-\infty, 3)$



UNIDAD III. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Propósito:

Al finalizar el alumno:

Utilizará las funciones exponencial y logarítmica para representar formas de variación de fenómenos de la naturaleza, que éstas permitan modelar. Retomará los conceptos de dominio y rango, así como el análisis de las relaciones entre los parámetros de estas funciones y su gráfica.

FUNCIONES EXPONENCIALES

Aprendizajes:

- Explora situaciones o fenómenos que corresponden a crecimiento o decaimiento exponencial, las relaciones o condiciones existentes y analiza las formas de variación.
- Identifica patrones de cambio involucrados en el crecimiento o decrecimiento de una función exponencial y bosqueja su gráfica.
- Identifica el dominio y rango de una función exponencial y traza su gráfica.
- Analiza la relación entre las gráficas de funciones exponenciales con diferentes bases incluyendo el numero e.
- Resuelven problemas en diferentes contextos, que se modelen con funciones exponenciales.

Temática

- ❖ Situaciones que involucran crecimiento o decaimiento exponencial.
- ❖ Estudio analítico y grafico del comportamiento de funciones exponenciales del tipo:
- ❖ $f(x) = ab^x \quad con \quad b > 1 \quad ó \quad 0 < b < 1 \quad y \quad a \neq 0$
- ❖ Relación entre los parámetros de: $f(x) = ab^x$ con su gráfica.
- ❖ Importancia de la función: $f(x) = ae^x$ y sus aplicaciones.
- ❖ Problemas de aplicación.

FUNCIONES LOGARITMICAS

Aprendizajes:

- Comprende el concepto de logaritmo de un número base b y las relaciones:
$$b^y = x \quad \leftrightarrow \quad y = log_b x$$
- Opera con logaritmos de distintas bases y aplicará sus propiedades.
- Gráfica funciones logarítmicas e identifica su domino y rango.
- Verifica mediante gráficas o tablas que la función logarítmica es la función inversa de la exponencial.
- Resuelve problemas en diferentes contextos que se modelen con funciones logarítmicas y exponenciales.
- Resuelve problemas de aplicación empleando los conocimientos adquiridos anteriormente.

Temática

- ❖ Logaritmo de base b de un número y su relación con la potencia base b.
- ❖ Propiedades de logaritmos, (cambio de base)
- ❖ Definición, gráfica, dominio y rango.
- ❖ La función logaritmo como inversa de la función exponencial.
- ❖ Situaciones que involucren variación de tipo logarítmico.
- ❖ Ecuaciones logarítmicas y exponenciales.
- ❖ Resolución de problemas.

3.1 Funciones exponenciales

Las funciones exponenciales y logarítmicas son trascendentes, ya que no se pueden definir sólo en términos de suma, resta, multiplicación, división y potencias racionales de una variable x, como es el caso de las funciones algebraicas consideradas en capítulos anteriores. Tienen gran importancia en matemáticas y se aplican en casi todos los campos del trabajo del hombre; resultan especialmente útiles en los campos de la química, biología, física e ingeniería, donde contribuyen a describir cómo crecen o decrecen las magnitudes de la naturaleza.

Hasta ahora se ha trabajado con funciones de la forma $y = x^2$ dónde la base es variable y la potencia es constante, las funciones exponenciales se diferencian de éstas porque la base ahora es constante y la potencia es la variable $y = 2^x$

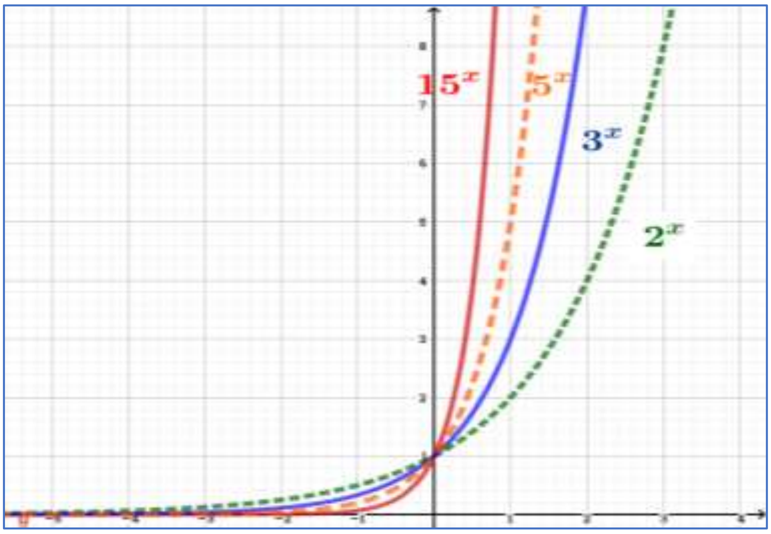
Usaremos dos tipos:

a) Función exponencial de base a, $y = a^x$ que generalmente se usa para describir fenómenos discretos, a puede tomar cualquier valor real positivo diferente de 1 y 0. La función inversa es logaritmo base a ($\log_a x$ para a distinta de 10, si a es 10 se acostumbra a usar sólo $\log x$)
b) Función exponencial natural $y = e^x$ se requiere para modelos continuos. El número $e \approx 2.71828183$ es irracional. La función inversa es logaritmo natural (ln).

En ambos casos *x* se restringe a números racionales.

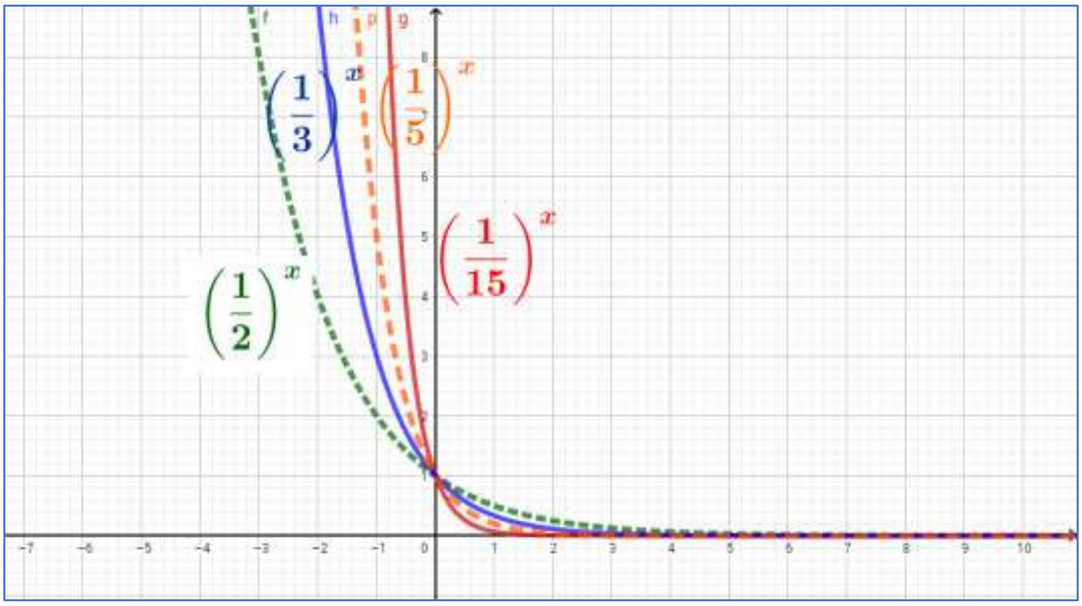
Para el análisis de las gráficas se dividirá en dos partes:

Cuando $a > 1$ la función es creciente, entre más grande sea el valor de a, la función crece más rápido, es decir, la curva es más vertical como se observa en la gráfica 3.1.



gráfica 3. 1

Cuando $0 < a < 1$ es una función decreciente. Análogamente, cuando a es menor a 1 los valores de la función se acercan más rápido a cero. (gráfica 3.2)



gráfica 3. 2

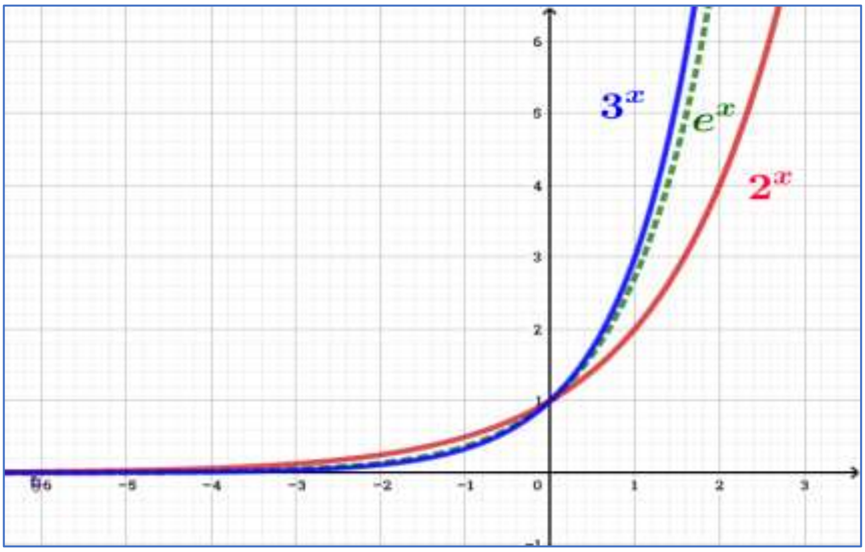
A continuación, retomaremos algunas de las propiedades de los exponentes, que nos ayudarán a entender el comportamiento de la gráfica:

<table>
<tr><td>$a^0 = 1$</td><td>Cuando x=0 la función es 1, por eso todas las gráficas intersecan al eje de las ordenadas en 1.</td></tr>
<tr><td>$1^x = 1$</td><td>$a \neq 1$ porque siempre daría 1, lo mismo aplica para $a \neq 0$ siempre es cero, excepto para cuando x=0, ya que 0^0no está definido.</td></tr>
<tr><td>$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$</td><td>Esta propiedad nos permite, observar por qué la función exponencial decrece cuando $0 < a < 1$, por ejemplo: $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1^x}{2^x} = \frac{1}{2^x}$
<table>
<tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$\frac{1}{2} = 0.5$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\frac{1}{2^2} = 0.25$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\frac{1}{2^3} = 0.125$</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>Se observa que entre más crece el valor de x se obtiene la mitad de valor anterior, o sea, f(x) es cada vez menor.</td></tr>
<tr><td>$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$</td><td>Esta propiedad se relaciona con la propiedad anterior y se observa en la gráfica cuando $a > 1$, para cualquier valor de x negativo, es decir, la parte izquierda de la gráfica, por ejemplo: 2^x
<table>
<tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr>
<tr><td>-1</td><td>$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5$</td></tr>
<tr><td>-2</td><td>$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = 0.25$</td></tr>
<tr><td>-3</td><td>$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = 0.125$</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Haciendo referencia a los últimos ejemplos, se observa que los valores que se van obteniendo son cada vez más pequeños, es decir, se acercan a cero, sin embargo, no llegan a ser cero. Por lo que tendremos una asíntota horizontal, para el caso de las gráficas mostradas anteriormente es el eje x.

Por otro lado, ya se había mencionado que la función exponencial natural (e) es un valor constante y se puede observar su comportamiento gráfico en la siguiente figura, donde se grafica entre 2^x y 3^x.



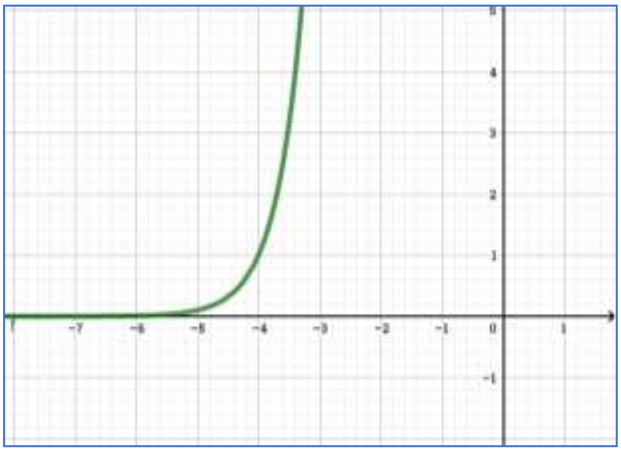
gráfica 3. 3

En todas las gráficas vistas hasta ahora el dominio **D**: $(-\infty, \infty)$ y el rango **R**: $(0, \infty)$.

Las trasformaciones que puede tener una gráfica de una función exponencial son:

Desplazamiento horizontal $y = a^{x+b}$

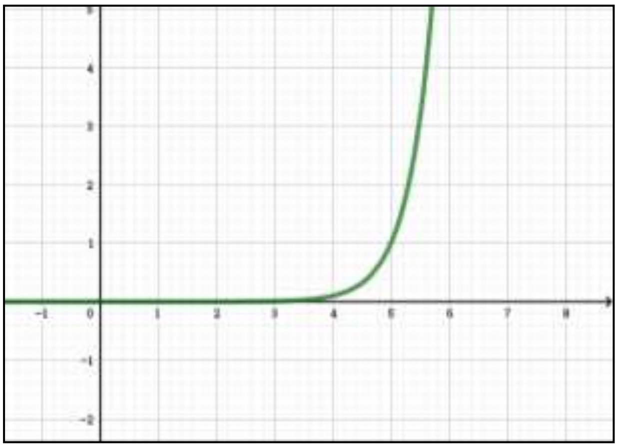
$f(x) = 10^{x+4}$



gráfica 3. 4

D: $(-\infty, \infty)$ **R**: $(0, \infty)$

$g(x) = 10^{x-5}$

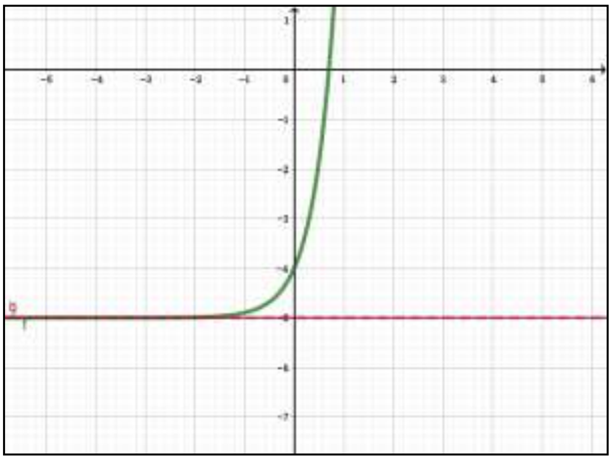


gráfica 3. 5

D: $(-\infty, \infty)$ **R**: $(0, \infty)$

Desplazamiento vertical $y = a^x + c$

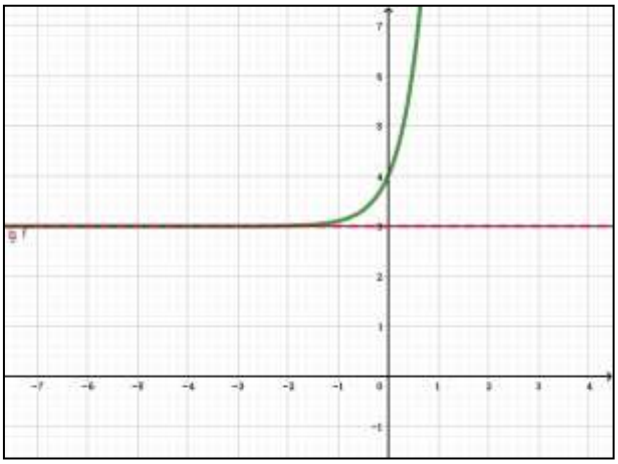
$h(x) = 10^x - 5$



gráfica 3. 6

D: $(-\infty, \infty)$ **R**: $(-5, \infty)$

$i(x) = 10^x + 3$



gráfica 3. 7

D: $(-\infty, \infty)$ **R**: $(3, \infty)$

Observa que dicho desplazamiento se convierte en la nueva asíntota horizontal de la función.

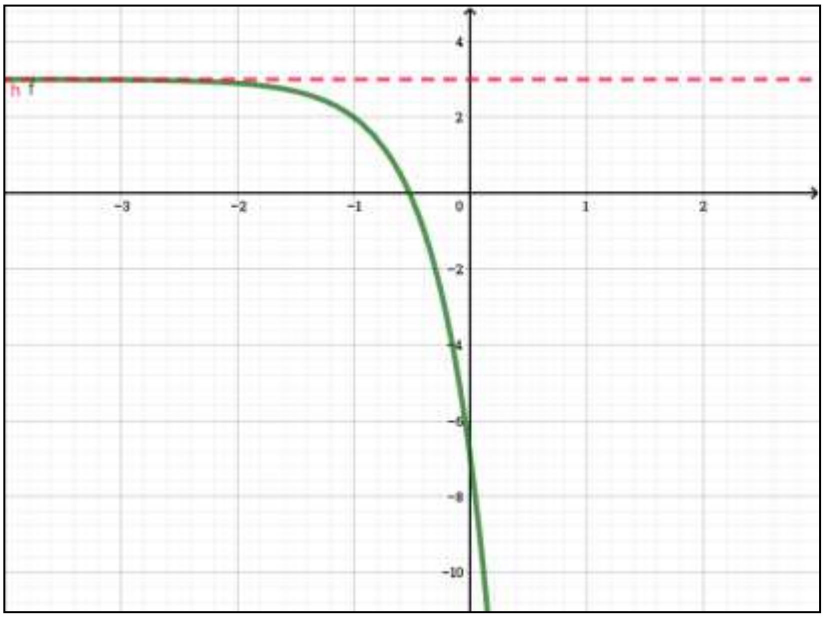
También se tienen la forma $y = ka^{x+b} + c$ donde se tiene desplazamiento horizontal (b), desplazamiento vertical (c) y un factor *k* que afecta la gráfica comprimiendo o expandiendo la gráfica. Para realizar un bosquejo de la gráfica se requiere conocer las propiedades de los exponentes y logaritmos para hallar los valores donde la función intersecta los ejes coordenados.

Propiedades de los exponentes son válidas para a^x y e^x	Propiedades de los logaritmos Válidas para $\log_a x$ y $\ln x$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$	$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$ $\log_a(b)^c = \mathrm{c} \cdot \log_a b$ $\log_a(b) = \frac{\log(b)}{\log(a)}$

Por último, la propiedad $\log_a a^x = a^{\log_a x} = x$ es la que nos muestra la relación entre la función exponencial y logarítmica, ésta nos servirá para calcular los valores donde la función intersecta a los ejes coordenados. Esta propiedad también es válida para el logaritmo natural y la función exponencial (e) $\ln e^x = e^{\ln x} = x$

Ejemplo 1.

$$j(x) = -10^{x+1} + 3$$



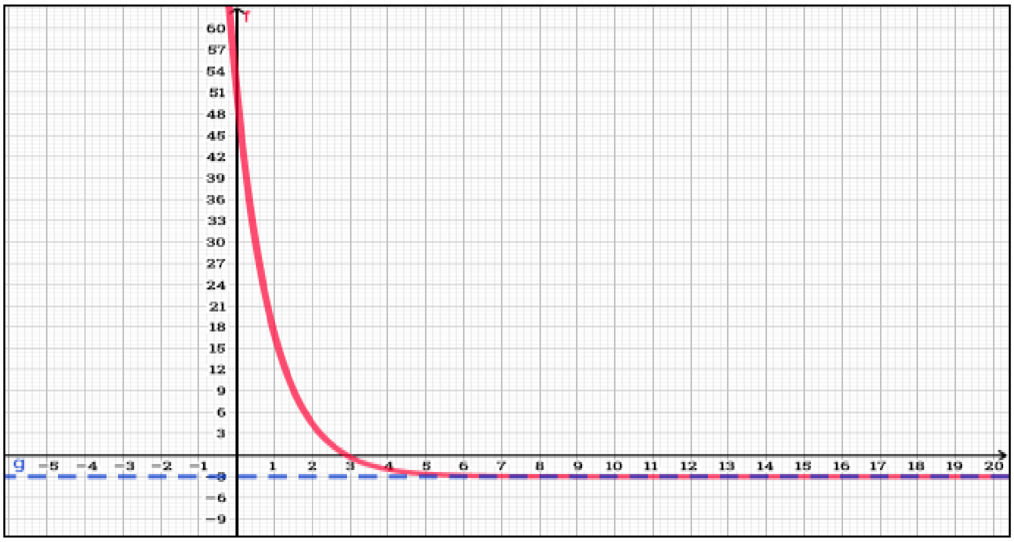
gráfica 3. 8

La función j(x) tuvo un desplazamiento de 1 unidad a la izquierda, 3 unidades hacia arriba y el signo menos reflejó la función respecto a la asíntota horizontal.

Intersección con eje de las abscisas	Intersección con el eje de las ordenadas
$j(x) = 0$ $0 = -10^{x+1} + 3$ $10^{x+1} = 3$ $\log 10^{x+1} = \log 3$ $x + 1 = \log 3$ $x = \log 3 - 1$ $x = -0.5228$	$x = 0$ $j(0) = -10^{0+1} + 3$ $j(0) = -7$

Ejemplo 2.

$$k(x) = e^{4-x} + 3$$



gráfica 3. 9

Intersección con eje de las abscisas	Intersección con el eje de las ordenadas
$k(x) = 0$ $0 = e^{4-x} - 3$ $3 = e^{4-x}$ $\ln 3 = \ln e^{4-x}$ $\ln 3 = 4 - x$ $\ln 3 - 4 = -x$ $-\ln 3 + 4 = x$ $2.9013 = x$	$x = 0$ $k(0) = e^{4-0} - 3$ $k(0) = 51.5981$

Ejercicio 3.1

Grafica las siguientes funciones exponenciales.

$f(x) = 10^{x-2} + 1$

$g(x) = -10^{3+x} + 4$

$h(x) = 10^{5-x} - 7$

$i(x) = e^{6+x} - 15$

$j(x) = -e^{x-5} + 3$

$k(x) = e^{4-x} - 9$

3.2 Base común de la función exponencial.

La base de la función exponencial que se utiliza para determinar el monto acumulado en una cuenta con interés compuesto está dada por:

$$A_t = P\left(1 + \frac{I}{n}\right)^{nt}$$

Donde I = tasa de interés, t= número de años, n= número de veces al año en que se compone el interés, P= capital y A_t = monto acumulado después de t años.

Ejemplo 1

Se invirtió un peso por un año a una tasa de interés del 100%; es decir, P=1, t=1. Por lo que la expresión anterior queda:

$$A = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$$

¿Qué ocurre cuando n aumenta?

Si se capitaliza continuamente el interés

¿Cuál es la diferencia?

Solución:

Primero se encontrará la cantidad redituada si el interés se compone anualmente, semestralmente, por trimestre, etc., hasta llegar a horas; esto se logra haciendo a n= 1, 2, 4, 12, 52, 280, 8640; como se observa en la siguiente tabla.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2.25
4	2.44
12	2.61
52	2.69
360	2.715
8640	2.718
518 400	2.71826
31 104 000	2.7182818

Se observa que los aumentos son sustanciales hasta los cálculos semanales (52) o diarios (360) y después los aumentos son insignificantes. Es decir, no importa que tan a menudo se capitalice el interés, el monto acumulado no excede un número que aproximadamente es 2.7182818 y se denota por el símbolo e.

La base natural e tiene muchas aplicaciones debido a que describe el crecimiento continuo. Por lo que, si el interés se capitaliza continuamente, se puede escribir la fórmula de interés compuesto como la función: $A_t = Pe^{kt}$

Ejemplo 2

Algunas bacterias se reproducen muy rápido, por ejemplo, bajo ciertas condiciones hay bacterias que se duplican en tiempos muy cortos como la escherichia coli que es una de las bacterias que se multiplica más rápido, ya que se duplica en un tiempo de 15 minutos.

Suponiendo que se tiene una célula de escherichia coli, ¿Cuántas habrá al término de una hora y media?

Recuerda que en una hora y media hay seis intervalos de quince minutos, es decir seis cuartos de hora. Y a la función de la población la llamaremos P(t), donde t representa el tiempo.

Por lo que tenemos:

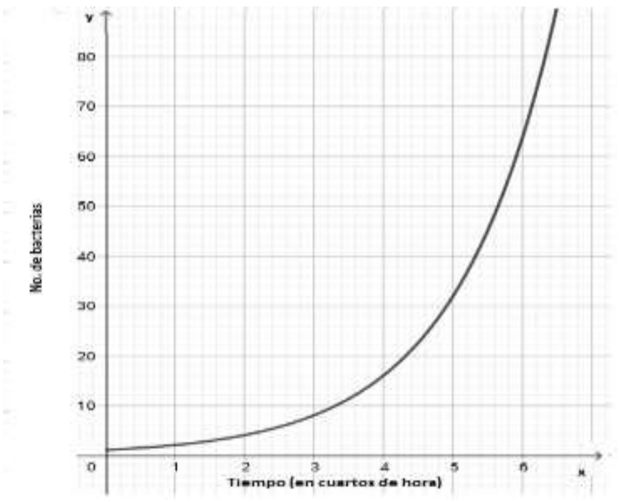
En t=0 tenemos una bacteria, lo que se representa P(0)=1

En t=1, es decir al pasar los primeros quince minutos tenemos, P(1)=2

En t=2, tenemos P(2)=4, y en los siguientes quince minutos, P(3)=8, y así sucesivamente hasta llegar a los seis cuartos. P(4)=16, P(5)=32 y P(6)=64.

Por lo que al final de una hora y media se habrán reproducido 64 bacterias.

Como se puede observar la expresión matemática que representa el crecimiento de bacterias es $P(t)=2^t$. la cual podemos graficar, como se muestra a continuación.



gráfica 3. 10

El crecimiento de la bacteria escherichia coli, se puede expresar de forma continua ya que suponemos que se puede obtener el número de bacterias en cualquier instante.

Ejemplo 3:

Crecimiento de poblaciones.

El crecimiento vegetativo de una población viene dado por la diferencia entre nacimientos y defunciones.
Si inicialmente partimos de una población P_0, que tiene un índice de crecimiento i (considerado en tanto por 1), al cabo de t años se habrá convertido en $P(t) = P_0(1+i)^t$

Un pueblo tiene 600 habitantes y su población crece anualmente un 3%. ¿Cuántos habitantes habrá al cabo de 8 años?

$$P(8) = 600(1+\tfrac{3}{100})^8$$

$$P(8) = 600(1+0.03)^8$$

$$P(8) = 600(1.03)^8$$

$$P(8) = 600(1.2667) = 760$$

Al cabo de 8 años habrá 760 habitantes.

Ejemplo 4.

En un reactor nuclear al interactuar un neutrón con un átomo de Uranio 235 este se fisiona generando una gran cantidad de energía, productos de fisión y aproximadamente dos neutrones nuevos, que a su vez interactúan con otros átomos de Uranio produciendo una reacción en cadena, es decir, por cada interacción se producen dos neutrones nuevos de manera constante considerando que existe una gran cantidad de átomos del orden de 1025 átomos en el interior del reactor.

Si se comienza con un neutrón, (a) ¿Cuántos neutrones habrá después de 10 interacciones?, (b) ¿Cuántos neutrones habrá después de 3 interacciones?, Realiza la gráfica de la función.

Solución:

Para contestar las preguntas anteriores se hará una tabla, simbolizando por x el número de interacciones y por $y = f(x)$ el número de neutrones producidos. Colocar algunos valores de x la cual es la variable independiente, para encontrar el valor de la variable dependiente (en este caso la regla de correspondencia).

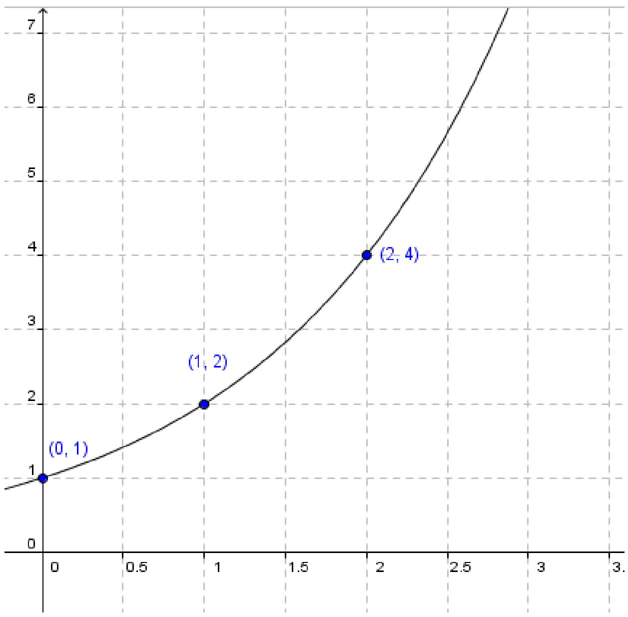
El alumno dará algunos valores como los que se muestran en la tabla para *x*, y lo irá sustituyendo en la regla de correspondencia (f(x)) y con ayuda de su calculadora podrá llenar la tabla.

x	0	1	2	3	10
$f(x) = 2^x$	1	2	4	8	1024

(a) Como se desea el valor de y cuando x=10 entonces tenemos que $2^{10} = 1024$. Es decir, después de 10 interacciones se tendrán 1024 neutrones.

(b) El valor de y cuando x = 3 entonces tenemos que $2^3 = 8$. Es decir, después de 3 interacciones se tendrán 8 neutrones.

Con lo anterior se puede decir que la relación puede ser descrita por la función exponencial $f(x) = 2^x$ y al localizar los valores en un plano cartesiano tenemos que la gráfica representa lo siguiente.



gráfica 3. 11

Ejemplo 5.

El crecimiento de un cultivo es tal que, cada hora se duplica el número de bacterias en este mismo. En estas condiciones si había 1000 bacterias al iniciar del experimento, el número habrá aumentado a 2000 en una hora, 4000 después de dos horas y así sucesivamente. ¿Cuántas bacterias habrá al término de 4 horas? ¿Cuál es la función que representa la situación?

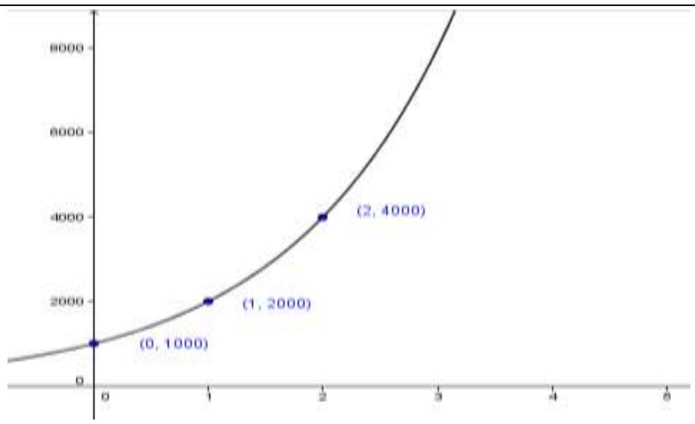
Solución:

x (t)	0	1	2	3	4
y f(t)	1000	2000	4000	8000	16000

t es el tiempo en horas, f(t) es el número de bacterias presentes en un cultivo en el tiempo t.

Entonces tenemos que

$$f(x) = (1000)2^t$$



gráfica 3. 12

Ejemplo 6.

Si se invierten $8000 a una tasa anual de 6.5% de interés con capitalización continua, encuentra la cantidad total que habrá en la cuenta después de 5 años, si no se hace ningún retiro ni depósito, ni cargo por manejo de cuenta.

Solución.

En este caso utilizamos la fórmula de capitalización continua, con P=8000, k=0.065, t=5.

$$A_t = Pe^{kt}$$

$$A_t = 8000e^{0.065(5)} = 11{,}072.2451$$

Después de 5 años en la cuenta habrá $11,072.2451

3.3 La función logaritmo como inversa de la función exponencial.

La función logarítmica con base a es la inversa de la función exponencial con base a, de modo que la gráfica de $\log_a x = y$ se obtiene reflejando la gráfica de $a^y = x$ hasta la línea de y=x.

El proceso para graficar una función logarítmica es:

1. Transformar la función logarítmica en forma exponencial.
2. Generar una tabla de datos, proponiendo valores a la variable independiente *y*, para obtener la correspondencia en x.
3. Ubicar los valores obtenidos en un plano y unirlos a través de una línea suave.

Ejemplo 1.

Siguiendo el proceso descrito anteriormente, realizar las gráficas de las siguientes funciones logarítmicas.

a. $\log_2 x = y$

1. Transformar la función logarítmica en forma exponencial.

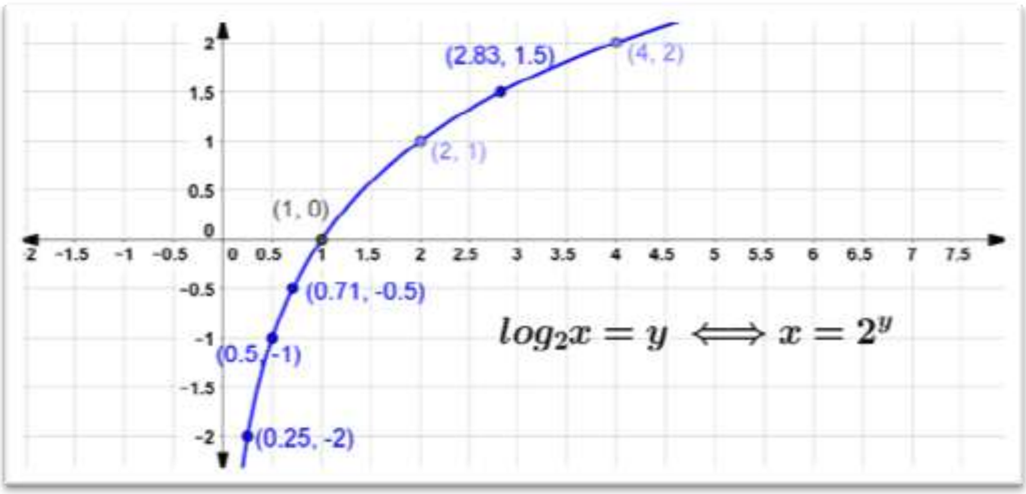
$$\log_2 x = y \quad \Leftrightarrow \quad 2^y = x$$

2. Generar una tabla de datos…

A partir de la función obtenida la variable independiente ahora es "*y*" mientras que la dependiente es "x", en consecuencia, proponemos valores para x, y aplicando las leyes de los exponentes, obtenemos su correspondencia en "*y*".

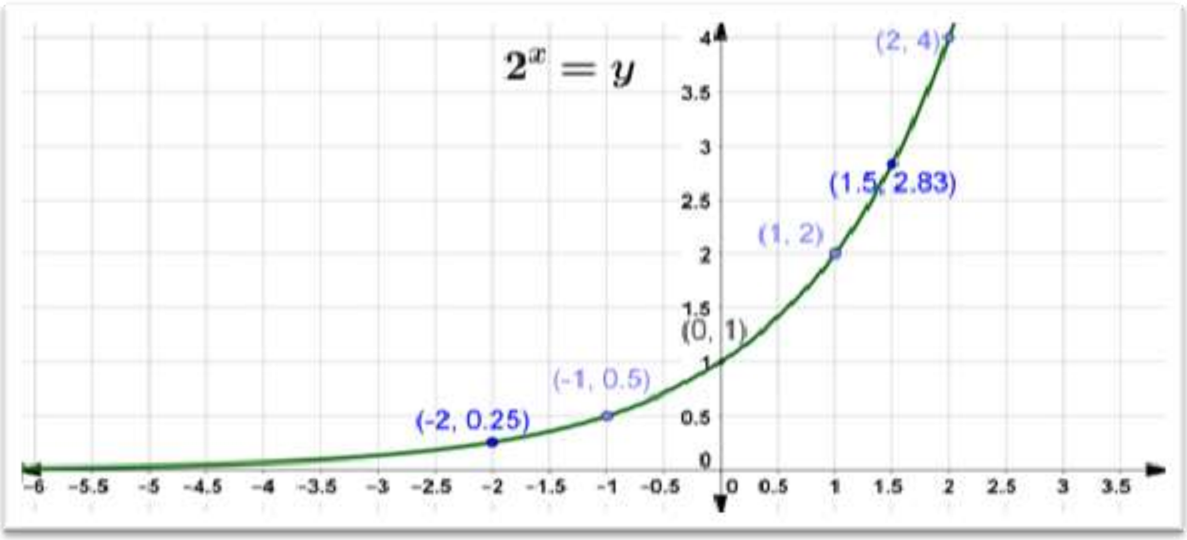
3. Realizar la gráfica.

$2^y = x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	1	2	7.10	4
y	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\sqrt{2^3}$	2



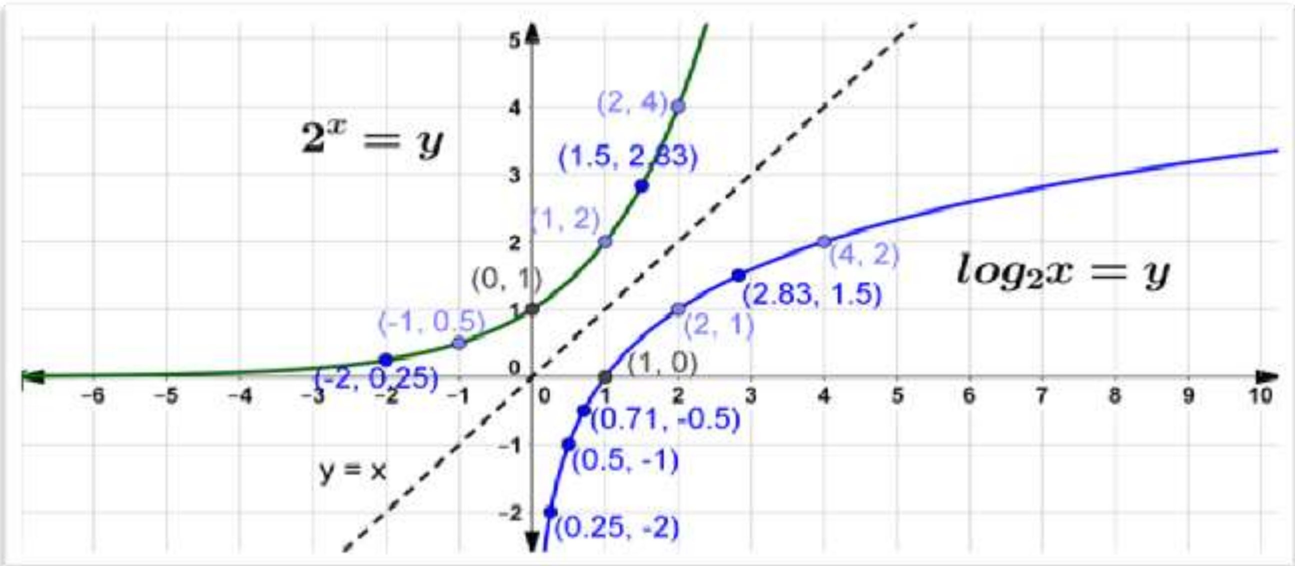
gráfica3. 13

Esta es la gráfica de la función solicitada, podemos observar que pasaría si el acomodo de las variables fuese el **inverso**, es decir, en la función $\boldsymbol{2^y = x}$ **invertir** la posición de las variables como $\boldsymbol{2^x = y}$ y al graficar ésta última, tenemos:



gráfica 3. 13

En base a estas imágenes, podemos observar como las coordenadas de los puntos en la gráfica de la función $2^x = y$ se invierten en comparación a los de la función $2^y = x$. Si graficamos en un mismo plano ambas funciones podemos observar mejor esta conclusión.



gráfica 3. 14

Como las funciones exponenciales y logarítmicas son inversas, podemos obtener una a partir de la otra como se mostró en las gráficas anteriores, pero sin la necesidad de tabular las dos funciones, por ejemplo:

Realizar la gráfica inversa (logarítmica) a la de la función exponencial $f(x) = 3^x$

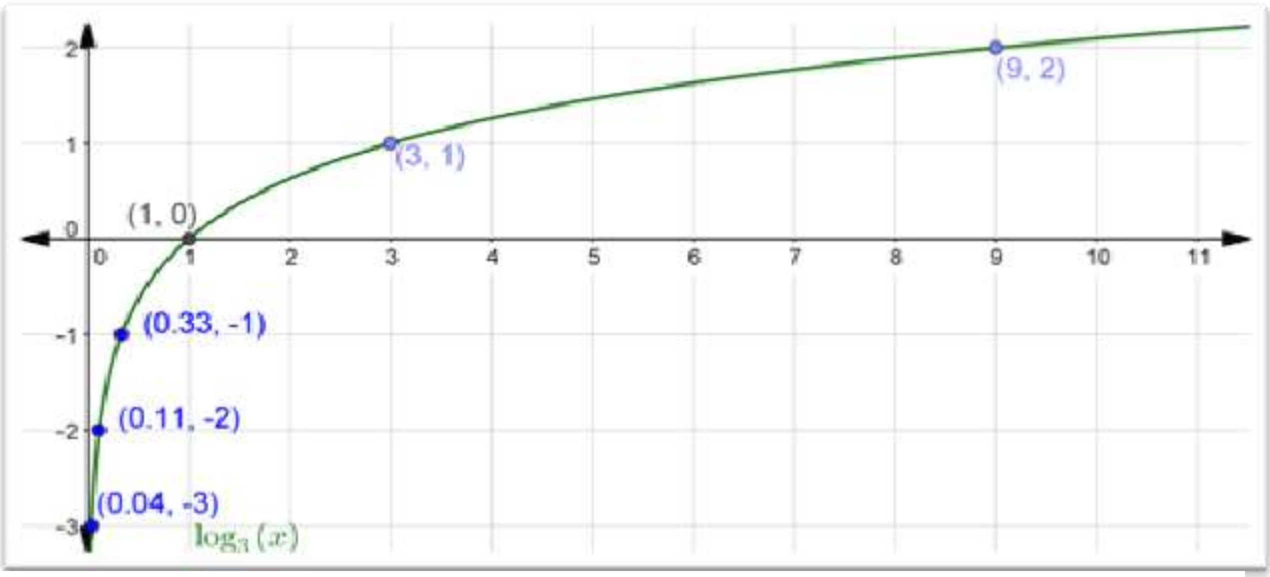
Tabulamos la función:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 3^x$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

Ahora, en lugar de graficar los puntos obtenidos los ordenamos en orden inverso, es decir:

x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$f(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3

y graficando estos últimos puntos, tenemos la gráfica de la función inversa de $f(x) = 3^x$ la función $\log_3 x = y$



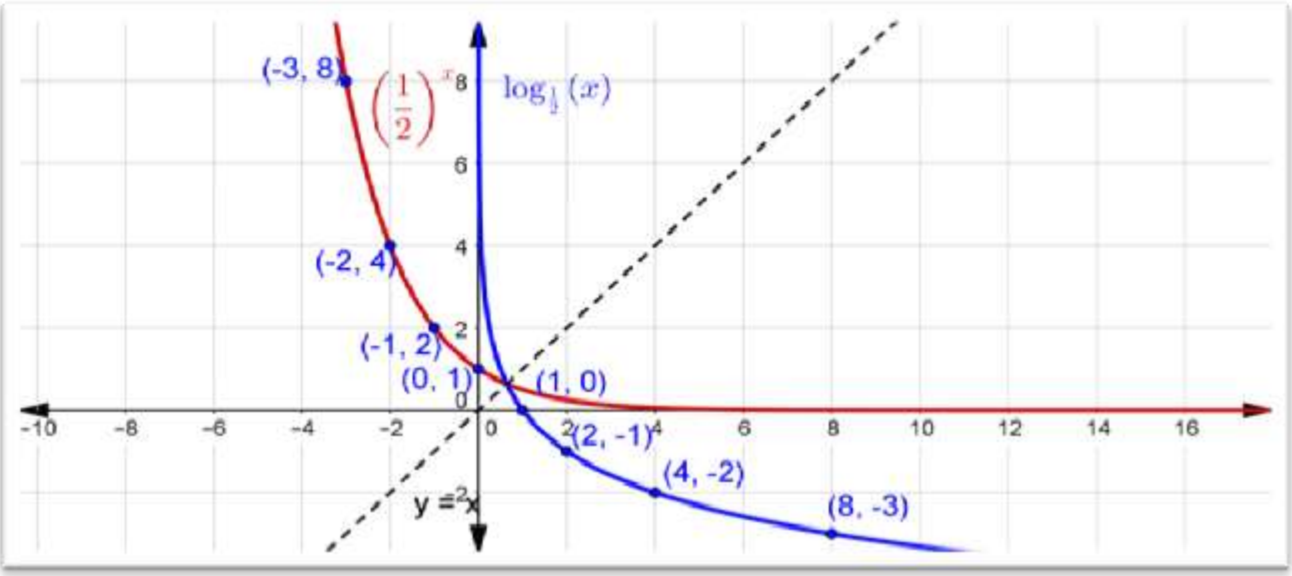
gráfica 3. 15

Resumiendo, podemos obtener la gráfica de una función exponencial o logarítmica y de su inversa, bajo las siguientes condiciones:

1. Si tenemos la tabulación de una de las dos funciones, basta con expresar de forma **inversa** y graficar la tabulación final.
2. Si tenemos la función, acomodamos las variables de forma **inversa** y tabulamos la función final.

Ejemplo 2.

La función $y = \frac{1}{2}^{x}$ la expresamos de forma inversa $x = \frac{1}{2}^{y}$ y tras tabular una de ellas, basta con ordenar los valores de coordenadas para obtener la gráfica de ambas funciones.

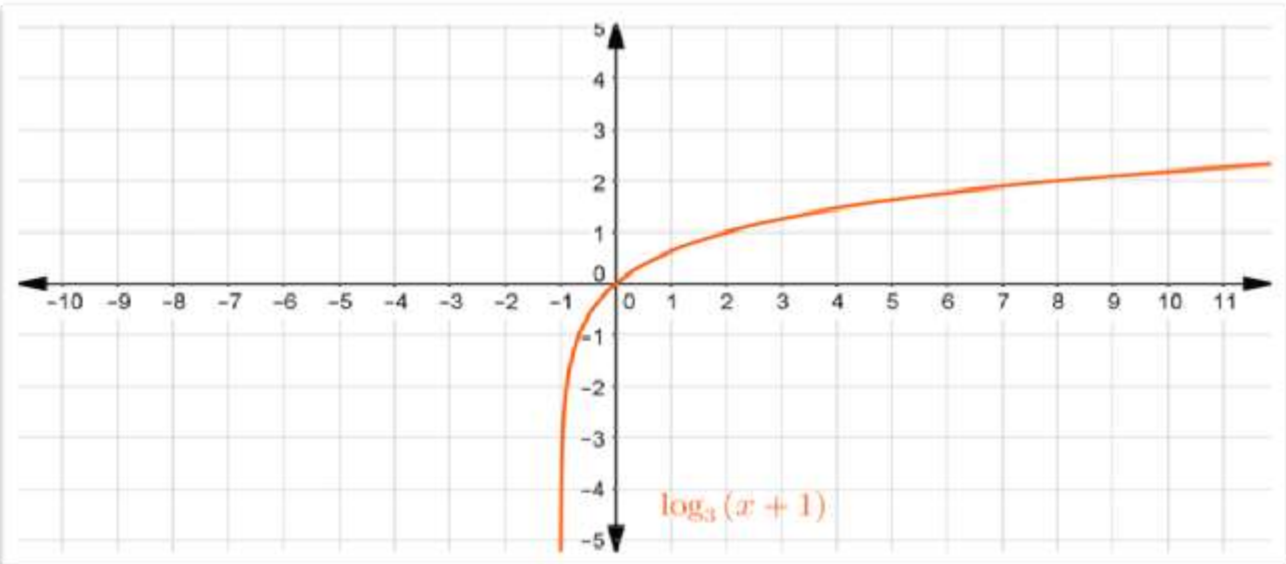


gráfica 3. 16

Ejemplo 3.

Realizar la gráfica de la función $\log_3(x+1) = y$

Transformamos la función a su forma exponencial $\mathbf{\log_3(x+1) = y} \;\; \Leftrightarrow \;\; \mathbf{3^y = (x+1)}$ despejamos x de esta última expresión $\mathbf{3^y - 1 = x,}$ después de tabular graficamos la función.

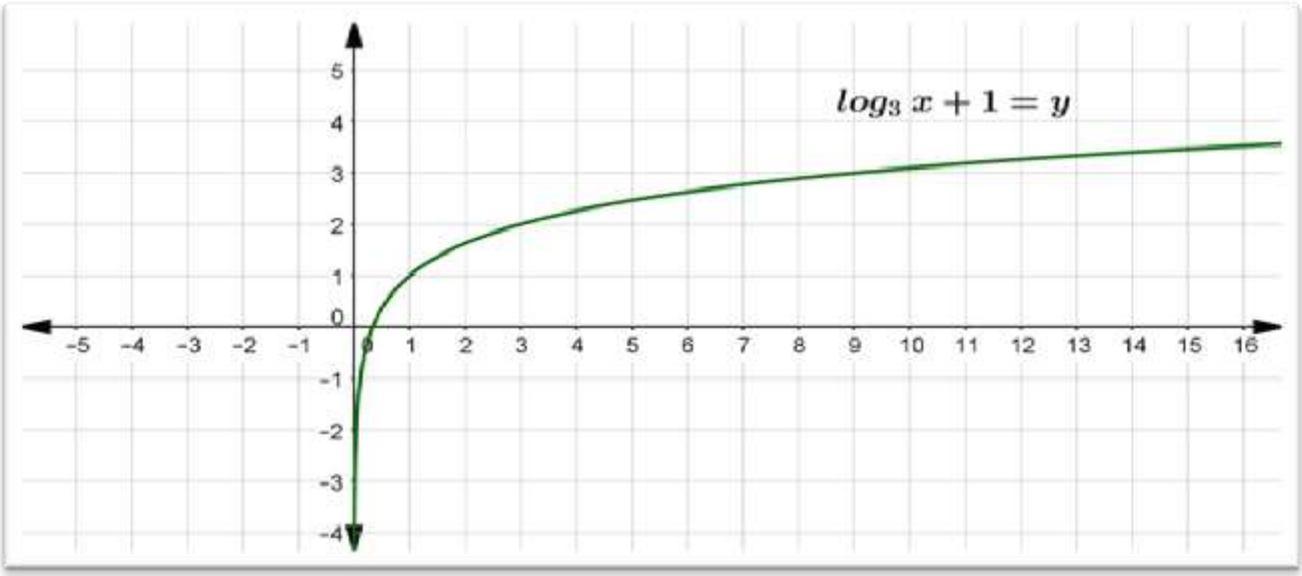


gráfica 3. 17

Ejemplo 4.

Realizar la gráfica de la función $\log_3 x + 1 = y$

Como (+1) no pertenece al argumento, en este caso, restamos 1 a ambos lados de la igualdad, nos queda $\mathbf{\log_3 x = y - 1,}$ ahora transformamos la función resultante a su forma exponencial $\mathbf{\log_3 x = y - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{y-1} = x,}$ después de tabular graficamos la función.



gráfica 3. 18

Ejercicios 3. 2

- Haz la gráfica de las siguientes funciones logarítmicas.
  1. $y = \log_2(x - 5)$
  2. $y = \log_3(x + 1)$
  3. $y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 4)$
  4. $y = \log_{\frac{2}{3}}(x) - 2$
- Haz, en cada caso, la gráfica de función inversa de la función dada.
  5. $m_{(x)} = e^x$
  6. $y = \log_4 2x$
  7. $n_{(x)} = \pi^x$
  8. $y = \log_{\frac{1}{5}} -x$
- Haz, en cada caso la gráfica de la función dada y de su inversa.
  9. $p_{(x)} = 4^{(x-3)} + 2$
  10. $q_{(x)} = 3^{(x+2)} - 4$
  11. $y + 4 = \log_3(x + 2)$
  12. $y - 2 = \log_3(x - 4)$

3.4 Situaciones que involucran variación de tipo logarítmico.

Ejemplo 1.

Una población crece continuamente a razón de 4% al año, puede calcularse su crecimiento en base a la función de crecimiento no inhibido, $A_{(t)} = A_0 e^{kt}$ Calcular el tiempo que tardará en duplicarse.

Solución.

Al revisar el texto, parece que faltan datos, pero basta con interpretar la información: el problema, solicita el doble de la población inicial; en base a esto tenemos que el doble de A_0 es $2A_0$ y k = 0.04 (la forma decimal de 4%). Si sustituimos en la función:

$2A_0 = A_0 e^{0.04t}$ sustituyendo los valores dados

$\frac{2A_0}{A_0} = e^{0.04t}$ dividiendo ambos de la ecuación entre A_0

$2 = e^{0.04t}$ afectando ambos lados por (ln)

$\ln 2 = \ln e^{0.04t}$ se cancela ln con *e,* por ser inversas y aplicamos la propiedad $\boldsymbol{\ln a^n = n \ln a}$

$\ln 2 = 0.04t$ dividimos ambos lados de la ecuación entre (0.04)

$\frac{\ln 2}{0.04} = t$ $t = 17.3\ años$ La población tardará un tiempo de 17.3 años en duplicarse.

Ejemplo 2.

En la escala Richter, la magnitud R de la intensidad I de un temblor está dada por la función $R = \log \frac{I}{Io}$ donde Io es la intensidad mínima. Determinar la intensidad de un temblor en escala Richter de un temblor que tiene una intensidad de 100 veces la de Io

Solución.

De acuerdo con la función dada basta con sustituir el valor de Io una a la vez.

$R = \log \frac{100I_0}{Io}$ sustituyendo la intensidad dada

$R = \log 100$ simplificando

$R = \log 10^2$ expresando 100 en base 10 y aplicando la propiedad $\boldsymbol{\log 10^n = n}$

$R = 2$ intensidad del temblor en escala Richter

Ejemplo 3.

El peso W (en kg) de una elefanta africana, a la edad de t (en años), puede calcular mediante la función $W_{(t)} = 2{,}600(1 - 0.51e^{(-0.075t)})^3$. Determinar:

a. El peso de la elefanta al nacer.
b. La edad en la cual, la elefanta pesará 1,800 kg.

Solución.

a. Al nacer la elefanta tendrá 0 años de vida, si sustituimos en la función dada:

$W_{(0)} = 2{,}600(1 - 0.51e^{(-0.075(0))})^3$ evaluando para t = 0

$W_{(t)} = 305.88$ kg peso de la elefanta al nacer

b. $1{,}800 = 2{,}600(1 - 0.51e^{(-0.075t)})^3$ evaluando $W_{(t)} = 1{,}800$

$\frac{1{,}800}{2{,}600} = \left(1 - 0.51e^{(-0.075t)}\right)^3$ dividiendo ambos lados de la ec. entre 2,600

$\ln\frac{900}{1{,}300} = \ln\left(1 - 0.51e^{(-0.075t)}\right)^3$ afectando ambos lados de la ec. por ln

$\ln\frac{900}{1{,}300} = 3\ln\left(1 - 0.51e^{(-0.075t)}\right)$ propiedad $\mathbf{\ln a^n = n\ln a}$

$\ln\frac{900}{(1{,}300)(3)} = \ln 1 - 0.51(-0.075t)\ln e$ dividiendo entre 3, multiplicando por ln y propiedad $\mathbf{\ln a^n = n\ln a}$

$\ln\frac{900}{3{,}900} = 0.03825t$ dividiendo ambos lados de la ec. entre 0.03825

$\ln\frac{900}{(3{,}900)(0.03825)} = t$ evaluando a la expresión final

$t = 18$ años (aproximadamente) edad de la elefanta al pesar 1,800 kg.

Ejemplo 4.

El yodo radioactivo I-131se usa con frecuencia en estudios de exploración o rastreos de la glándula tiroides, la sustancia se desintegra según la función $A_{(t)} = A_0a^{-t}$, donde A_0 es la dosis inicial y t es el tiempo en días. Encontrar a, suponiendo que la vida media del I-131 es de 8 días.

Solución.

La vida media de un isótopo radiactivo representa el tiempo que le lleva a éste perder la mitad de su masa inicial, en este caso 8 días.

$\frac{A_0}{2} = A_0a^{-t}$ condición de vida media

$\frac{A_0}{2A_0} = a^{-t}$ dividiendo ambos lados de la ec. entre A_0

$\frac{1}{2} = a^{-t}$ simplificando

$\ln\frac{1}{2} = \ln a^{-t}$ afectando ambos lados de la ec. por ln

$\ln\frac{1}{2} = -t\ln a$ propiedad de los logaritmos $\mathbf{\ln a^n} = \boldsymbol{n}\,\mathbf{\ln}\,\boldsymbol{a}$

$\ln\frac{1}{2} = -8\ln a$ sustituyendo t = -8

$-\frac{1}{8}\ln\frac{1}{2} = \log a$ dividiendo ambos lados de la ec. entre (-8)

$\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{8}} = \ln a$ propiedad de los logaritmos $\mathbf{\ln a^n} = \boldsymbol{n}\,\mathbf{\ln}\,\boldsymbol{a}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{8}} = a$ propiedad de los logaritmos $\ln x = \ln y \quad \Leftrightarrow \quad x = y$

$a = 2^{\frac{1}{8}}$ aplicando ley de los exponentes $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$

$a = 1.09$ dosis inicial del isótopo I-131.

3.5 Ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

En esta parte se usarán las propiedades de los exponentes y logaritmos que se enunciaron anteriormente.

Ejemplo 1.

$\mathbf{8^x = \frac{1}{2}}$

$2^{3^x} = \frac{1}{2}$ expresando 8 en base 2

$2^{3x} = 2^{-1}$ ley de los exponentes $a^{n^m} = a^{nm}$

$3x = -1$ condición exponencial $a^x = a^y \quad \Rightarrow \quad x = y$

$x = \frac{-1}{3}$ dividiendo ambos lados de la ec. entre 3

Ejemplo 2.

$\mathbf{10^{3x-3} = 1,000}$

$10^{3x-3} = 10^3$	expresando 1,000 en base 10
$3x - 3 = 3$	condición exponencial $a^x = a^y \quad \Rightarrow \quad x = y$
$x = \frac{6}{3}$	sumando 3 ambos lados de la ec.
$x = 2$	multiplicando ambos lados de la ec. por $\frac{1}{3}$

Ejemplo 3.

$\mathbf{5^x = 625^2}$

$5^x = 5^{4^2}$	expresando 8 en base 2
$5^x = 5^8$	ley de los exponentes $a^{n^m} = a^{nm}$
$x = 8$	condición de ec. exponencial $a^x = a^y \quad \Rightarrow \quad x = y$

Ejemplo 4.

$\mathbf{\log_2(-x+2) + \log_2(x) = 0}$

$\log_2(-x+2)(x) = 0$	propiedad de los logaritmos $\log_b x + \log_b y = \log_b xy$
$(-x^2 + 2x) = 2^0$	transformando a su forma exponencial
$(x^2 - 2x + 1) = 0$	sumando $x^2 - 2x$ a ambos lados de la ec.
$(x-1)(x-1) = 0$	factorizando el trinomio cuadrado
$(x-1) = 0 \quad (x-1) = 0$	propiedad de igualdad
$x_1 = 1 \quad x_2 = 1$	despejando la incógnita en ambas ec.

Ejemplo 5.

$\mathbf{\log_3(4x+3) - \log_3(x+2) = \log_3 x}$

$\log_3 \frac{(4x+3)}{(x+2)} = \log_3 x$	propiedad de los logaritmos $\log_b x = \log_b y \quad \Rightarrow \quad x = y$
$(4x+3) = (x+2)x$	multiplicando ambos lados de la ec. por $(x+2)$
$4x + 3 = x^2 + 2x$	realizando el producto indicado
$x^2 + 2x - 4x - 3 = 0$	sumando a ambos lados de la ec. $(-4x-3)$
$x^2 - 2x - 3 = 0$	reduciendo términos semejantes

$(x+1)(x-3)=0$ factorizando el trinomio cuadrado

$(x+1)=0 \quad (x-3)=0$ propiedad de igualdad

$x_1=-1 \qquad x_2=3$ despejando a la incógnita en ambas ec.

Ejemplo 6.

$$\mathbf{3\log_2(x-1)+\log_2 4=5}$$

$\log_2 4(x-1)^3=5$ propiedad de los logaritmos $\log_b x^n = n\log_b x$

$2^5=4(x-1)^3$ transformando a forma exponencial

$\frac{2^5}{4}=(x-1)^3$ multiplicando ambos lados de la ec. por $\frac{1}{4}$

$\sqrt[3]{\frac{2^5}{4}}=x-1$ afectando ambos lados de la ec. por $\sqrt[3]{\quad}$

$\sqrt[3]{\frac{2^5}{2^2}}+1=x$ expresando 4 en base 2 y sumando 1 a ambos lados de la ec.

$\sqrt[3]{2^3}+1=x$ ley de los exponentes $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$

$x=2+1$ obteniendo la raíz cúbica

$x=3$

Ejemplo 8.

$$\mathbf{\log_8 x=\frac{3}{2}\log_8 64}$$

$\log_8 x=\log_8 64^{\frac{3}{2}}$ propiedad de los logaritmos $\log_b x^n = n\log_b x$

$x=64^{\frac{3}{2}}$ propiedad de los logaritmos $\log_b x=\log_b y \quad \Rightarrow \quad x=y$

$x=\sqrt{64^3}$ ley de los exponentes $a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$

$x=\sqrt{2^{6^3}}$ expresando 64 en base 2

$x=\sqrt{2^{18}}$ ley de los exponentes $a^{n^m}=a^{nm}$

$x = 2^9$ obteniendo la raíz cuadrada

$x = 512$ evaluando 2^9

Ejemplo 9.

$\log\left(\frac{3}{5}\right)^x = \log 7^{(1-x)}$ afectando ambos lados de la ec. por log

$x \log\frac{3}{5} = (1-x)\log 7$ propiedad de los logaritmos $\log_b x^n = n\log_b x$

$x \log\frac{3}{5} = \log 7 - x\log 7$ realizando el producto indicado

$x \log\frac{3}{5} + x\log 7 = \log 7$ sumando a ambos lados de la ec. $(x\log 7)$

$x(\log\frac{3}{5} + \log 7) = \log 7$ factorizando por término común

$x = \frac{\log 7}{(\log\frac{3}{5}+\log 7)}$ multiplicando ambos lados de la ec. por $\frac{1}{(\log\frac{3}{5}+\log 7)}$

$x = 1.35$ evaluando la expresión final

Ejercicio 3.3

Calcula el valor de x en cada una de las siguientes ecuaciones.

1. $\mathbf{\log_3(3x-2) = 2}$	**9.** $\mathbf{\log_{\frac{1}{3}}(1-2x)^{\frac{1}{2}} = -1}$	**17.** $\mathbf{4^x - 2^x = 0}$	**25.** $\mathbf{e^{2x} = 7}$
2. $\mathbf{\log_5(x^2+x+4) = 2}$	**10.** $\mathbf{\log x + \log(x+15) = 2}$	**18.** $\mathbf{2^x = 10}$	**26.** $\mathbf{2^{1-x} = 3}$
3. $\mathbf{-2\log_4 x = \log_4 9}$	**11.** $\mathbf{\log_x 4 = 2}$	**19.** $\mathbf{4^x = 8}$	**27.** $\mathbf{3e^x = 10}$
4. $\mathbf{3\log_2 x = -\log_2 27}$	**12.** $\mathbf{\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)^{\frac{1}{3}} = -2}$	**20.** $\mathbf{3^{1-2x} = 4^x}$	**28.** $\mathbf{e^{1-4x} = 2}$
5. $\mathbf{2\log_3(x-4) - \log_3 9 = 2}$	**13.** $\mathbf{5^{1-2x} = \frac{1}{5}}$	**21.** $\mathbf{\left(\frac{3}{5}\right)^x = 7^{1-x}}$	**29.** $\mathbf{e^x = \pi^{1-x}}$
6. $\mathbf{\log_x \frac{1}{8} = 3}$	**14.** $\mathbf{4^{x^2} = 2^x}$	**22.** $\mathbf{3^{x^3} = 3^{x^2}}$	**30.** $\mathbf{400e^{0.2x} = 600}$
7. $\mathbf{\log_4 x + \log_4(x-3) = 1}$	**15.** $\mathbf{9^{-x} = \frac{1}{3}}$	**23.** $\mathbf{8^{x^2-2x} = \frac{1}{2}}$	**31.** $\mathbf{5(2)^{3x}}$**=8**
8. $\mathbf{\log_2(x+4)^3 = 6}$	**16.** $\mathbf{\frac{1}{2}^{1-x} = 4}$	**24.** $\mathbf{10^x = 25}$	**32.** $\mathbf{18 = 10e^x}$

Problemas de aplicación

1. La presión atmosférica varia con la altura sobre la superficie de la tierra. Los meteorólogos determinaron que para alturas por debajo de 10 km., la presión P en mmHg o torrs está dada por $P = 760e^{-0.125a}$, donde a es la altura en Km.
   a) ¿Cuál es la presión atmosférica a 3.3 Km?
   b) ¿A qué altura la presión atmosférica será 450 torrs?

Solución:

$$P = 760e^{-0.125a}\text{, sustituimos el valor de la altura}$$

$$P = 760e^{-0.125(3.3)} = 760(0.6619) = 503.1148\ torrs$$

La presión atmosférica a 3.3 Km es de 503.1148 torrs.

Para saber la altura se sustituye la presión y despejamos a.

$$450 = 760e^{-0.125a}$$

$$\frac{450}{760} = e^{-0.125a}$$

$$0.5921 = 760e^{-0.125a}$$

Para poder despejar el exponente a se aplica logaritmo en ambos lados de la ecuación.

$$\ln(0.5921) = -0.125(a)lne$$

$$\frac{\ln(0.5921)}{-0.125} = a$$

$$4.1926 = a$$

La altura a 450 torrs es de 4.1926 Km.

2.- Una persona pide un préstamo de $35,000 a un interés compuesto anual de 13.5% y lo pagará en 4 años, liquidándolo al final. ¿Cuánto dinero tendrá que pagar?

La fórmula para calcular el interés compuesto es: $A = A_0(1 + i)^t$ donde A es el capital total A_0 es la cantidad inicial, i el interés y, t el tiempo.

$$A = 35{,}000(1 + 0.135)^4$$

$$A = 58{,}083.3277$$

Al final de cuatro años tendrá que pagar $58,083.3277

3.- La población mundial en 1975 fue cerca de 4 billones y se ha duplicado cada 35 años. Suponiendo que esta tasa de crecimiento continúa, estime el año en el cual la población mundial alcanzara 32 billones de habitantes.

$$N(x) = N_0 2^t$$

$$32 = 4(2)^{(x-1975)/35}$$

$$\frac{32}{4} = 2^{\frac{x-1975}{35}}$$

$$8 = 2^{(x-1975)/35}$$

$$2^3 = 2^{(x-1975)/35}$$

Como es la misma base, podemos igualar los exponentes.

$$3 = \frac{x-1975}{35}$$

$$3(35) = x - 1975$$

$$105 + 1975 = x$$

$$2080 = x$$

En el año 2080 habrá 32 billones de habitantes.

Ejercicio 3.4

1. La población mundial en 1975 fue cerca de 4 billones y se ha duplicado cada 35 años. Suponiendo que esta tasa de crecimiento continúa, estime el año en el cual la población mundial alcanzara 37 billones de habitantes.

2. En cierto lugar se encontró un fósil conteniendo 74% del carbono14, que se encuentra en una muestra de carbono actual de la misma masa. Si sabemos que el decaimiento radiactivo está dado por $N(x) = N_0 e^{-kt}$ y para el carbono 14, k=0.001216 ¿Cuál es la edad de la muestra?

3. Una sustancia radiactiva decae exponencialmente con una vida media de 350 años. Determina el valor de k en la expresión $N(x) = N_0 e^{-kt}$, siendo N la cantidad presente de la sustancia después de t años y N_0 la sustancia inicial.

4. Un cultivo se inicia con 10,000 bacterias y su número se duplica cada 40 minutos y el crecimiento de la población está determinado por $N(x) = N_0 e^{rt}$
    a) Obtener una función para determinar el número de bacterias el tiempo t.
    b) Determina el número de bacterias después de una hora.
    c) ¿Después de cuantos minutos habrá 50,000 bacterias?

Soluciones a los ejercicios de la unidad III.

Ejercicio 3.1

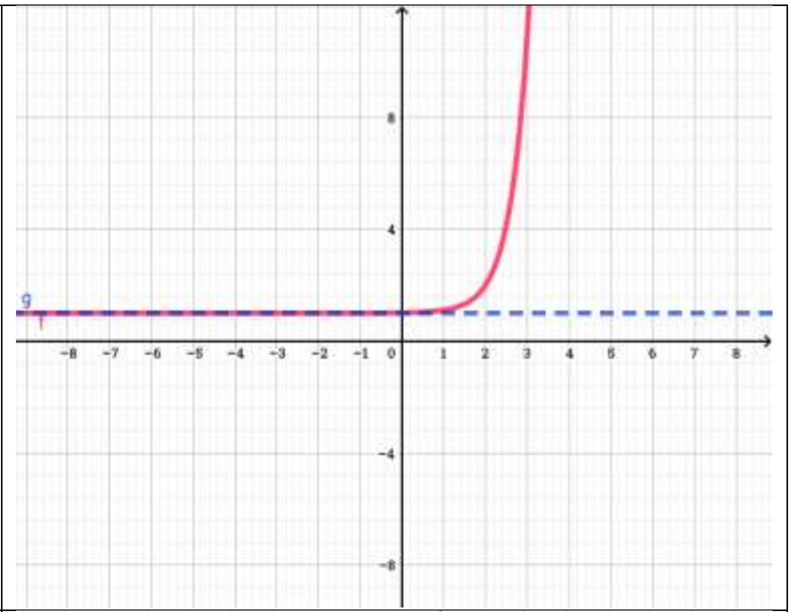
<table>
<tr>
<td>

$f(x) = 10^{x-2} + 1$

Intersección con el eje de las ordenadas:
$f(0) = 1.01$

Intersección con el eje de las abscisas:
No hay

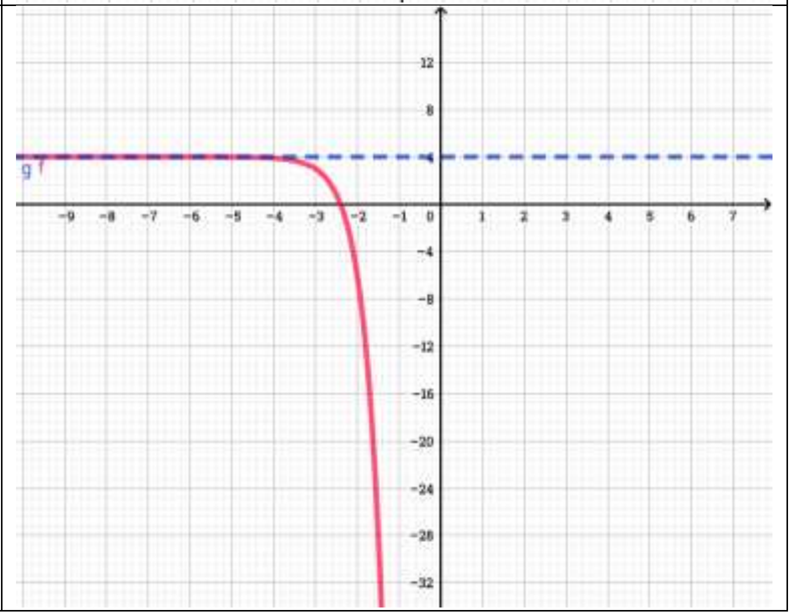
</td>
<td>



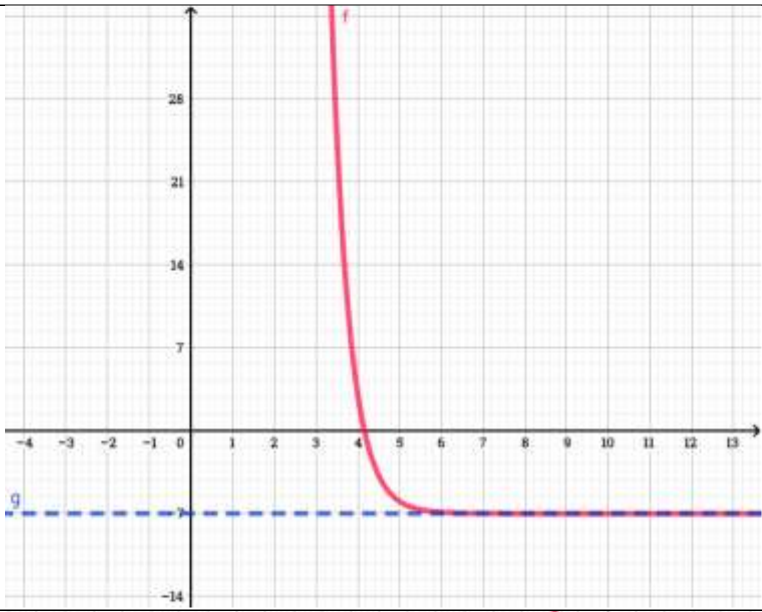
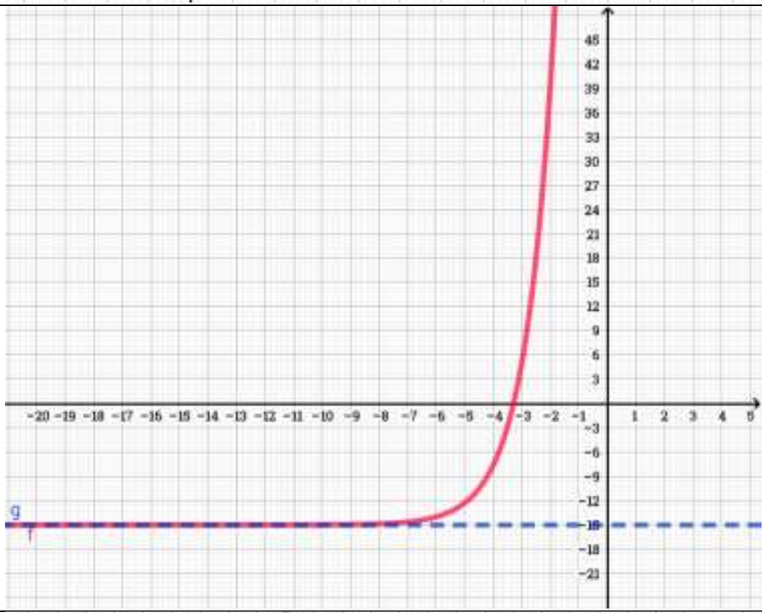
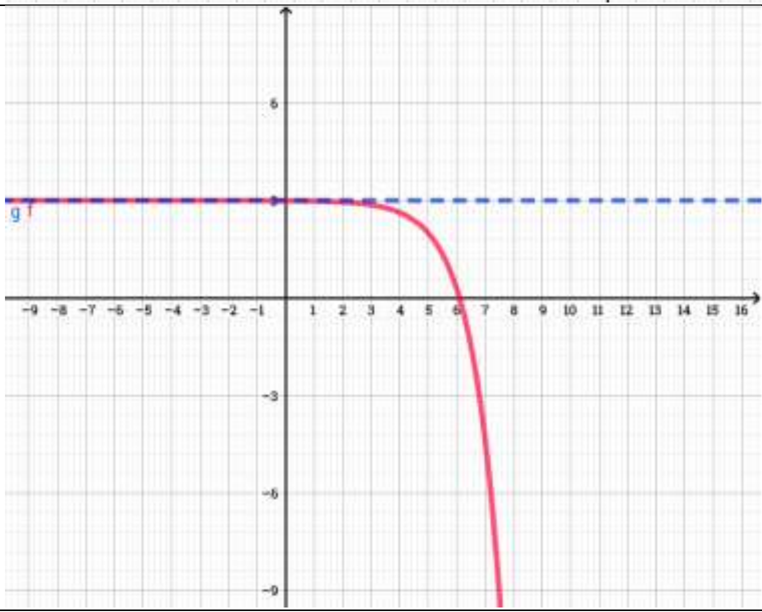
</td>
</tr>
<tr>
<td>

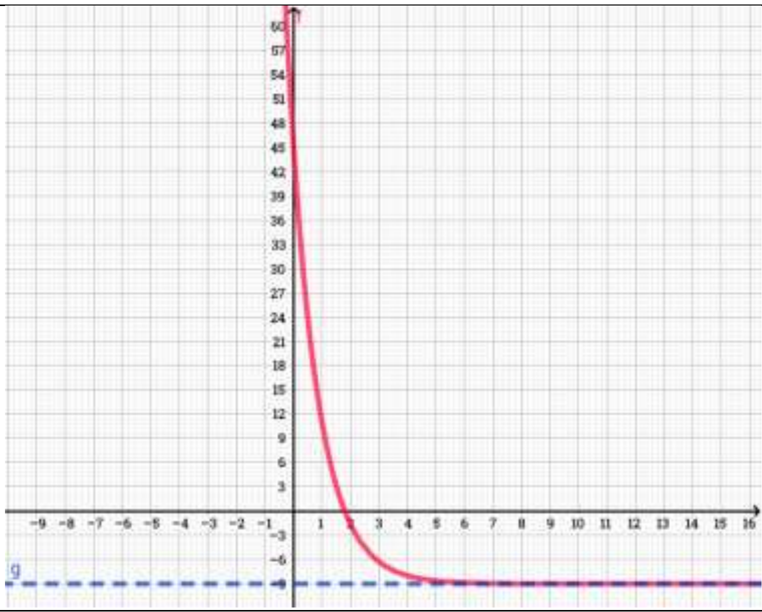
$g(x) = -10^{3+x} + 4$
Intersección con el eje de las ordenadas
$g(0) = -996$
Intersección con el eje de las abscisas
$x = -2.3979$

</td>
<td>



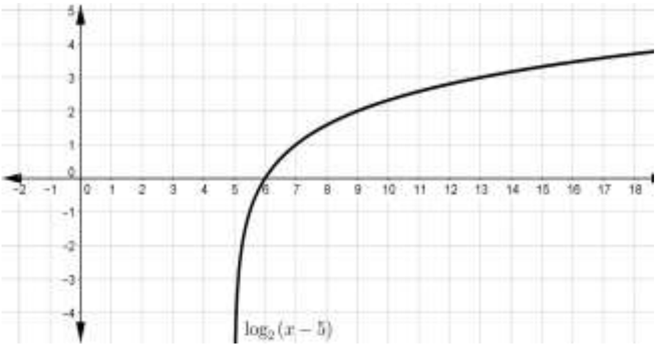
</td>
</tr>
</table>

$h(x) = 10^{5-x} - 7$ Intersección con el eje de las ordenadas: $h(0) = 99993$ Intersección con el eje de las abscisas $x = 4.1549$	
$i(x) = e^{6+x} - 15$ Intersección con el eje de las ordenadas: $i(0) = 388.428$ Intersección con el eje de las abscisas: $x = -3.2919$	
$j(x) = -e^{x-5} + 3$ Intersección con el eje de las ordenadas: $j(0) = 2.9932$ Intersección con el eje de las abscisas $x = 6.0986$	

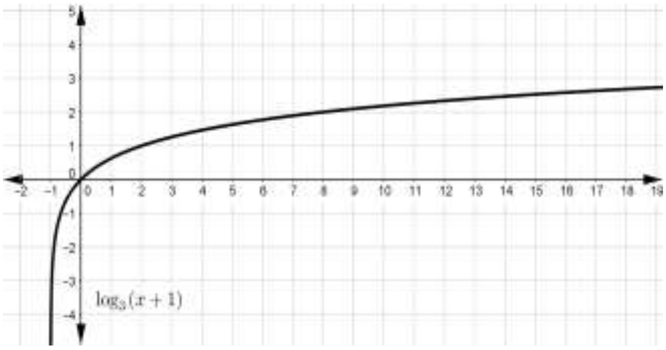
$k(x) = e^{4-x} - 9$ Intersección con el eje de las ordenadas: $k(0) = 45.5981$ Intersección con el eje de las abscisas: $x = 1.8027$	

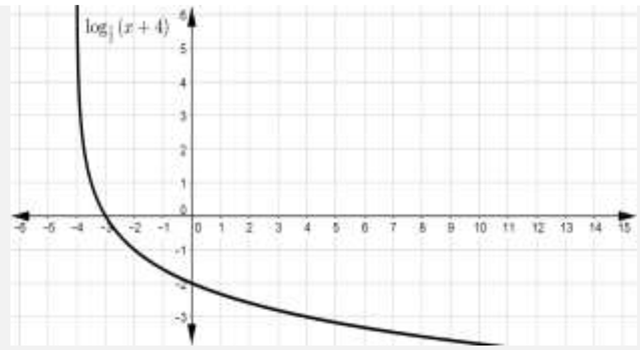
Ejercicio 3.2

1. $\boldsymbol{y = log_2(x-5)}$

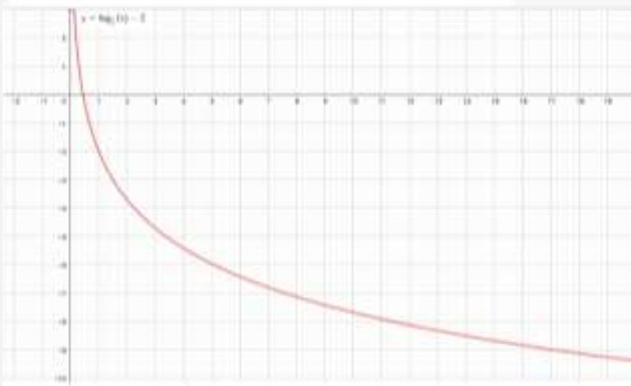


2. $\boldsymbol{y = log_3(x+1)}$

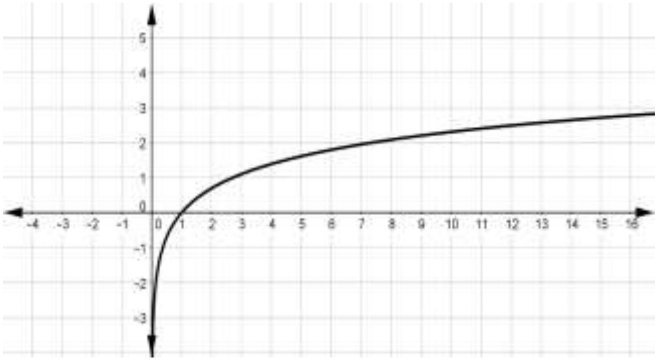




3. $\boldsymbol{y = log_{\frac{1}{2}}(x+4)}$

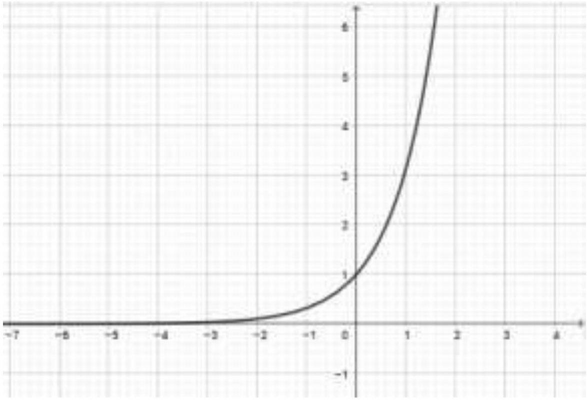


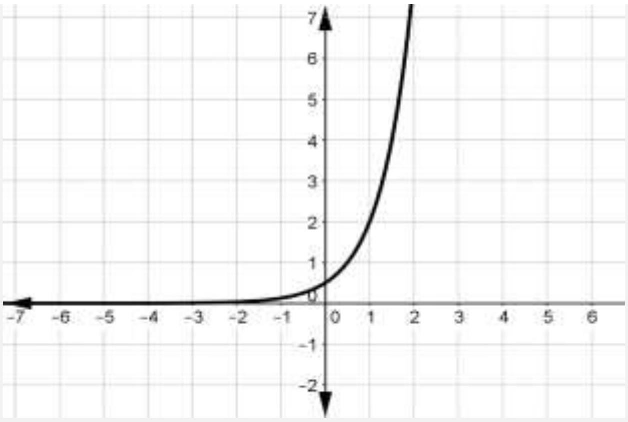
4. $y = log_{\frac{2}{3}}(x) - 2$



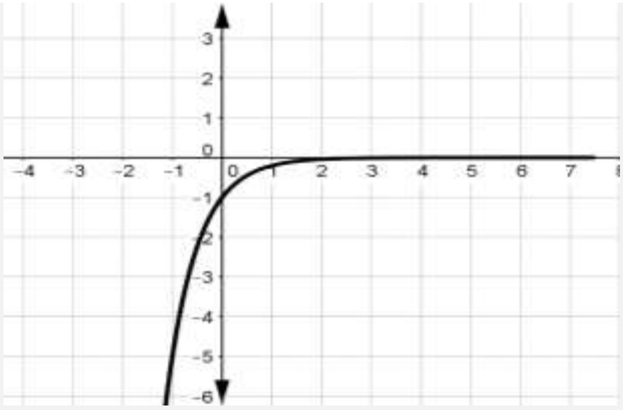
5. $\boldsymbol{y = log_4 x}$

6. $y = \pi^x$

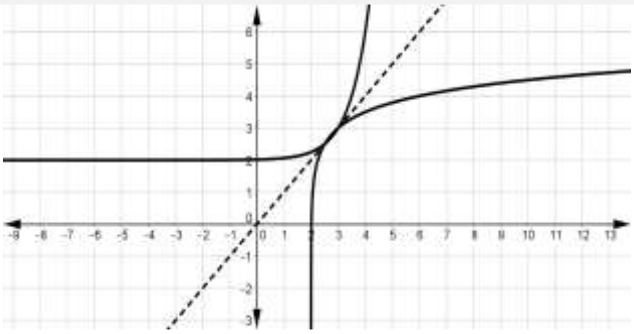




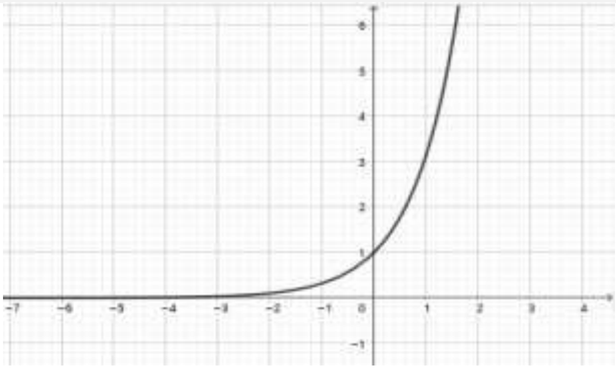
7. $\boldsymbol{n = e^x}$



8. $inversa\ de\ y = log_{\frac{1}{5}}(-x)$

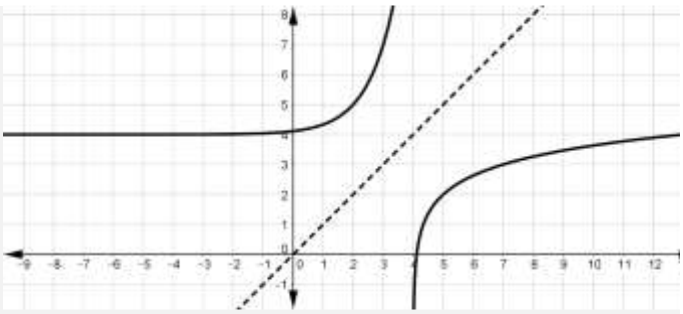


$\boldsymbol{p(x) = 4^{(x-3)} + 2}$



$q(x) = 3^{(x+2)} - 4$

$\boldsymbol{y + 4 = log_3(x + 2)}$



$y - 2 = log_3(x - 4)$

Ejercicio 3.3

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**
$\boldsymbol{x = \frac{11}{3}}$	x_1 =5.11 x_2 =4.11	$x = \frac{1}{3}$	$x = \frac{1}{3}$	$x = 5$
6.	7.	8.	9.	10.
$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$	$x_1 = 4$ $x_2 = \frac{11}{3}$	$x = 0$	$x = -4$	$x = -20$ $x_1 = 5$
11.	12.	13.	14.	15.
$\boldsymbol{x = 2}$	$x = 21$	$x = 1$	$x_1 = 0$ $x_2 = \frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$
16.	17.	18.	19.	20.
$\boldsymbol{x = 3}$	x =0	x =3.322	$x = \frac{3}{2}$	$x = 0.306$
21.	22.	23.	24.	25.
$\boldsymbol{x = 1.356}$	$x = 1$	x_1 =1.816 $x_2 = 0.183$	x =1.40	$x = 0.973$
26.	27.	28.	29.	30.
$\boldsymbol{x = -0.585}$	$x = 0.767$	$x = 0.0767$	$x = 0.533$	$x = 0.08$
31.	32.			
$\boldsymbol{x = 0.226}$	x =0.587			

Ejercicio 3.4

1. R = (en el año 2083 a mediados de abril)

2. R = (248 años de antigüedad)

3. R = (k= 0.001980)

4. R = a) r=0.017328, b) 28,284 bacterias, c) 23 min. aprox.

Autoevaluación unidad III

I.- Escribe las siguientes expresiones exponenciales a la forma $y = log_b x$

1. $3^4 = 81$
2. $8^{\frac{1}{3}} = 2$
3. $5^{-2} = \frac{1}{25}$
4. $5^4 = 625$
5. $121^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{11}$
6. $8^{\frac{4}{3}} = 16$

II.- Escribe las siguientes expresiones a la forma $b^y = x$

1.- $log_2 \frac{1}{64} = -6$ 2.- $log_6 1 = 0$

III.- Traza la gráfica de la función $f(x) = log_3 x$, mostrando una tabla de valores.

IV.- Resuelve las siguientes ecuaciones.

1.- $log_5 25 = y$ 2.- $log_9 x = 2$

3.- $log_b 8 = 3$ 4.- $log_4 64 - log_4 4 = log_4 x$

V.- Determina la cantidad de dinero que se acumulará en una cuenta que paga interés, a partir del capital de $4,292 al 6% de capitalización anual durante 10 años.

VI.- Determina la cantidad de dinero que se acumulará en una cuenta que paga interés, a partir del capital de $45, 788 al 6% de capitalización diaria durante 11 años de 365 días.

VII.- Supongamos que inicialmente hay 100 bacterias en un sitio dado y que la población se duplica cada hora. Determina qué población de bacterias habrá al término de 10 h.

VIII.- El dueño de una papelería estima que el valor de una fotocopiadora disminuye con el paso del tiempo, de acuerdo con una función representada como $V(t) = 15000(2^{-0.15t})$, donde t es el número de años transcurridos desde la adquisición de la máquina, y $V(t)$ esta dada en pesos.

a) Elabora la gráfica de la función.
b) Determina el dominio de la función

IX.- El yodo-131 tiene una vida media de 8 días. Si en un laboratorio tienen 300g, ¿Qué cantidad les quedará después de que transcurran 14 días?

X.- Elabora la gráfica de la función $f(x) = 2e^{3x-2}$

Solución de autoevaluación

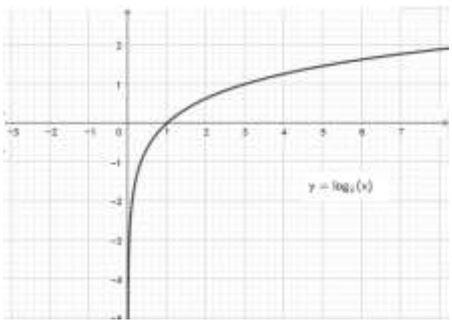
I. $1.-\quad log_3 81 = 4$ $\qquad$ $4.-\quad log_5 625 = 4$

$2.-\quad log_8 2 = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $5.-\quad log_{121}\frac{1}{11} = \frac{1}{2}$

$3.-\quad log_5 \frac{1}{25} = -2$ $\qquad$ $6.-\quad log_8 16 = \frac{4}{3}$

II. $1.-\quad 2^{-6} = \frac{1}{64}$ $\qquad$ $2.-\quad 6^0 = 1$

III.



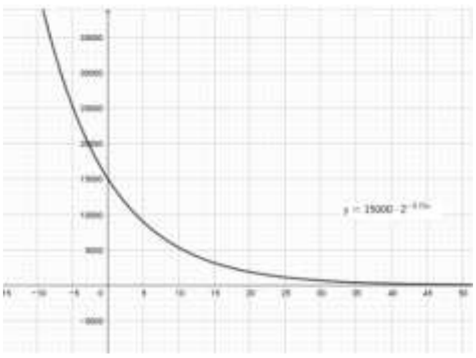
IV. 1. y = 2 $\qquad$ 2. x = 81 $\qquad$ 3. b = 2 $\qquad$ 4. x = 100

V. R= $7,686.32

VI. R= $88,585.46

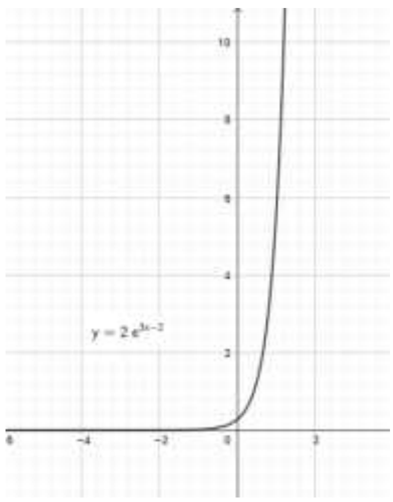
VII. R= 102,400 bacterias

VIII.



$D_f : \sqsubset 0, \propto)$

X.



IX. R=113.4183g

Unidad IV

Funciones trigonométricas

Propósito:

Al finalizar, el alumno: Comprenderá la extensión del concepto de razón trigonométrica a función trigonométrica. Estudiará las funciones seno y coseno en su forma característica de variación y el análisis de sus parámetros. Modelará situaciones de comportamiento periódico para resolver problemas.

Aprendizajes:

- Explora situaciones o fenómenos de variación periódica.
- Convierte medidas angulares de grados a radianes y viceversa
- Comprende la forma en que se extienden o generalizan las razones trigonométricas para ángulos arbitrarios.
- Extiende el concepto de razón trigonométrica a función, mediante la elaboración de una tabla o gráfica de:

$$f(x) = sen\, x, f(x) = cos\, x$$

- Analiza e identifica los parámetros que aparecen en las funciones:

$$f(x) = D + Asen\,(Bx + C)$$
$$f(x) = D + Acos\,(Bx + C)$$

  D desplazamiento vertical, A amplitud, B frecuencia, y desfasamiento.
- Utiliza las funciones trigonométricas para representar fenómenos de variación periódica

Temática

- Situaciones o fenómenos de variación periódica.
- Medidas angulares en grados y radianes. Conversiones.
- Razones trigonométricas seno, coseno y tangente para cualquier ángulo.
- Funciones trigonométricas: $f(x) = sen\, x, f(x) = cos\, x$. Gráfica, dominio, rango, ceros amplitud, periodo
- Gráfica de las funciones

$$f(x) = D + Asen\,(Bx + C)$$

$$f(x) = D + Acos\,(Bx + C)$$

- Análisis del comportamiento de la gráfica respecto de los parámetros: A, B, C y D.
- Problemas de aplicación.

4.1 Situaciones o fenómenos de variación periódica

Existen muchos fenómenos físicos que pueden describirse mediante un movimiento armónico simple. Las ondas de radio, televisión, de luz y el sonido, y las olas del mar exhiben un movimiento armónico simple.

Un movimiento armónico simple es el que describe una partícula sometida a una fuerza restauradora proporcional a su desplazamiento. Se genera entonces un movimiento periódico, es decir que se repite cada cierto intervalo de tiempo. No todos los movimientos periódicos son armónicos. Para que lo sean, la fuerza restauradora debe ser proporcional al desplazamiento.

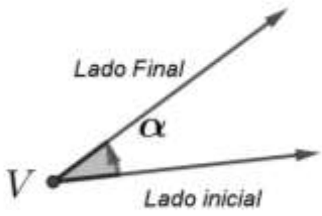
El problema del oscilador armónico simple aparece con mucha frecuencia en Física, ya que una masa en equilibrio bajo la acción de cualquier fuerza conservativa, en el límite de movimientos pequeños, se comporta como un oscilador armónico simple.

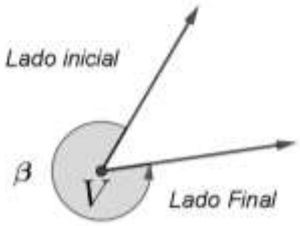
4.2 Medidas angulares en grados y radianes. Conversiones

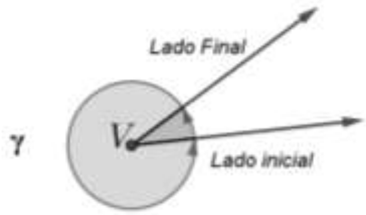
Puntualizando algunos conceptos:

Se sabe que un rayo o una semirrecta es la parte de una recta que inicia en un punto V de la recta y se extiende indefinidamente en una dirección: El punto inicial V de un rayo es denominado vértice.

Si se dibujan dos rayos con vértice común se forma un ángulo. Uno de los rayos se denomina lado inicial y el otro lado final.

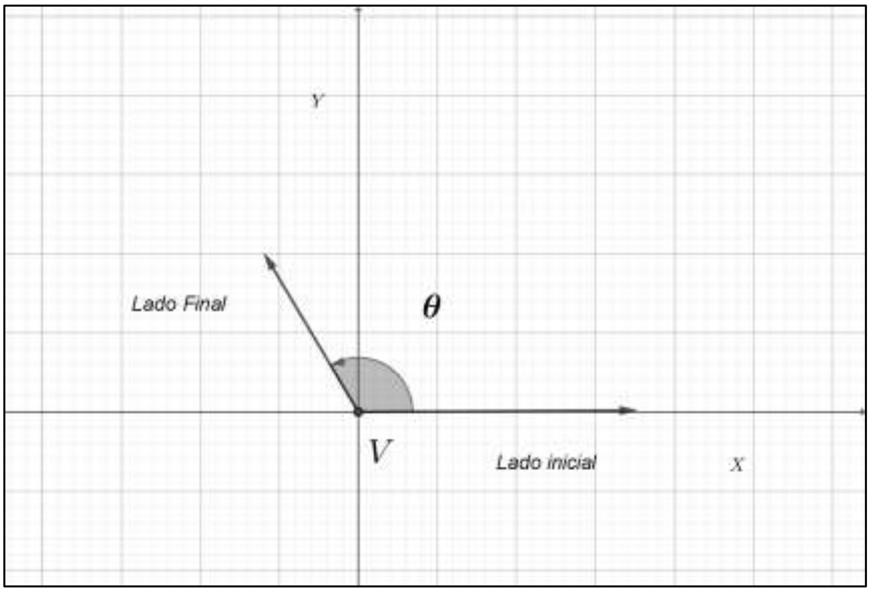
<table>
<tr>
<td>

a) Ángulo positivo</td>
<td>

b) Ángulo negativo</td>
<td>

c) Ángulo positivo</td>
</tr>
</table>

Si el vértice del ángulo θ se coloca en el origen $(0,0)$ de un sistema de coordenadas rectangulares y su lado inicial coincide con el eje X positivo, se dice que en posición estándar. Los ángulos se miden determinando la cantidad de rotación necesaria para que lado inicial coincida con el lado final.



gráfica 4. 1

Existen dos unidades de medida utilizadas comúnmente: grados y radianes.

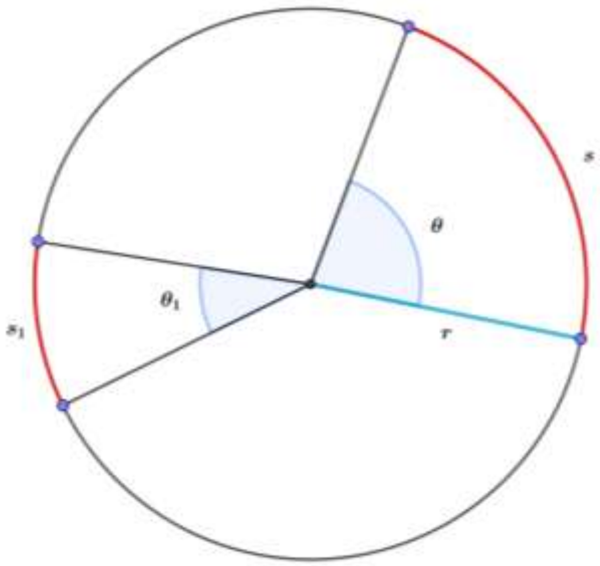
Para el caso de los grados, el ángulo que es formado por rotación, en sentido contrario a las manecillas del reloj a partir de su lado inicial hasta hacerlo coincidir con él mismo, es decir, una vuelta o una revolución se sabe que mide 360º (grados).

De tal forma que $1° = \frac{1}{360}$ de vuelta. Un ángulo recto mide 90º o $\frac{1}{4}$ de vuelta, un ángulo llano es un ángulo de 180º o $\frac{1}{2}$ vuelta.

Un ángulo central es un ángulo positivo cuyo vértice está en el centro de un círculo. Los rayos de un ángulo central subtienden (intersectan) un arco en un círculo, si el radio de un circulo es r y la longitud del arco subtendido por el ángulo central también es r, la medida del angulo es de 1 radian.

Considerando un circulo de radio r y dos ángulos θ y θ_1 centrales, medidos en radianes y que esos dos ángulos subtienden arcos de longitud s y s_1 respectivamente. Sabemos que la razón de las medidas de los ángulos equivale a la razón de las longitudes correspondientes de los arcos subtendidos por estos ángulos:

$$\frac{\theta}{\theta_1} = \frac{s}{s_1}$$



Y considerando que $\theta_1 = 1$ radian, la longitud s_1 del arco subtendido es igual al radio r del círculo, entonces $s_1 = r$ sustituyendo:

$$\frac{\theta}{1} = \frac{s}{r}$$

Entonces, para un círculo de radio r, un ángulo central de θ radianes subtiende un arco cuya longitud s es: $s = r\theta$

Un ángulo central de 1 vuelta o revolución, subtenderá un arco igual a la circunferencia del círculo. Como la circunferencia de un circulo de radio r es igual a $2\pi r$

$$s = r\theta$$

$$2\pi r = r\theta$$

$$2\pi = \theta$$

Es importante poder convertir de una a otra manera de medir los ángulos ya que se tienen estas dos unidades de medida.

Ejemplo 1.

Convierte $30°$ a Radianes

Solución:

Sí $\quad \pi = 180$

Entonces $\begin{matrix} \pi \to 180° \\ x \to 30° \end{matrix}$ $\qquad x = \frac{(\pi)(30°)}{180°} \qquad x = \frac{3}{18}\pi$

Simplificando $x = \frac{1}{6}\pi$

Ahora completa la siguiente tabla

Grados	$0°$	$30°$	$60°$	$90°$	$120°$	$150°$	$180°$	$210°$	$240°$	$270°$	$300°$	$330°$	$360°$
Radianes		$\frac{1}{6}\pi$											2π

Ejemplo 2.

Convierte $\frac{1}{4}\pi$ Radianes a grados

Solución:

Sí $\quad \pi = 180°$

Entonces $\begin{matrix} \pi \to 180° \\ \frac{\pi}{4} \to \quad x \end{matrix}$ $\qquad x = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)(180°)}{\pi} \qquad x = \frac{\frac{180\pi}{4}}{\frac{\pi}{1}}$

$$x = \frac{180\pi}{4\pi} \qquad x = \frac{180}{4}$$

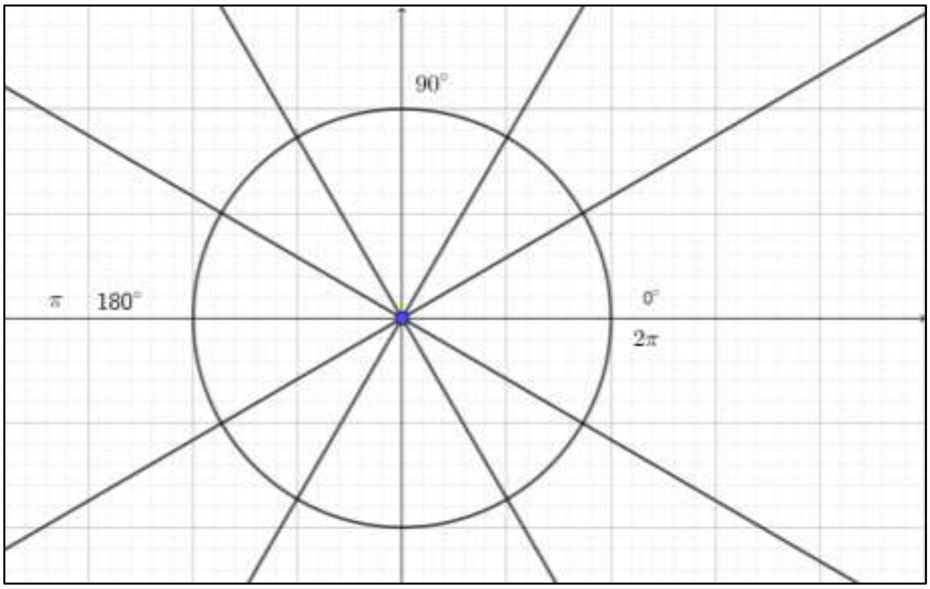
Simplificando

$$x = 45°$$

Ahora completa la siguiente tabla

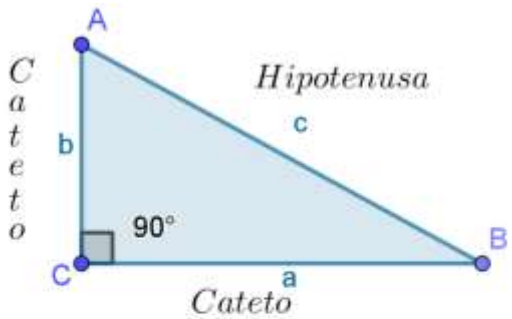
Grados									
Radianes	$0\,\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π

Marca las medidas de los ángulos que faltan, en grados y radianes para completar la siguiente figura:



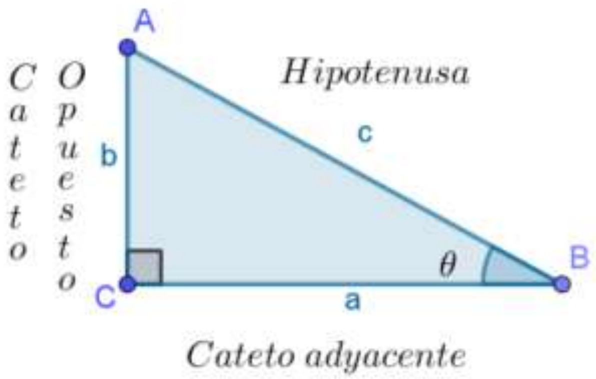
4.3 Razones trigonométricas: $f(x) = sen\ x, f(x) = cos\ x$

Un triángulo rectángulo es aquel en el que un ángulo es recto $(90°)$. El lado opuesto al ángulo recto en un triángulo rectángulo se llama hipotenusa y los otros dos lados se llaman catetos, en la figura siguiente la hipotenusa será representada por la letra c para indicar que su longitud es de c unidades; de forma similar se marcaron los catetos con las letra a y b. Como el triángulo es un triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras nos dice que:



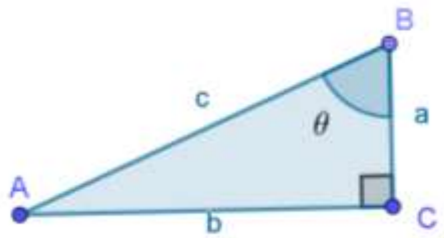
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Las razones trigonométricas de un ángulo agudo son, básicamente, el seno, el coseno y la tangente. Se definen a partir de un ángulo agudo, θ, de un triángulo rectángulo, cuyos elementos son la hipotenusa, el cateto adyacente al ángulo, y el cateto opuesto al ángulo.



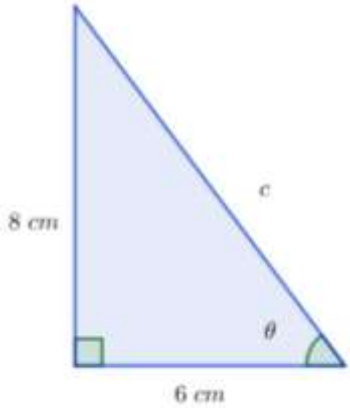
- El seno del ángulo es el cateto opuesto dividido por la hipotenusa.
  - $sen\ \theta = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$
- El coseno del ángulo es el cateto adyacente dividido por la hipotenusa.
  - $cos\ \theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$
- La tangente del ángulo es el cateto opuesto divido por el cateto adyacente.
  - $tan\ \theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$

En la siguiente figura se tienen las razones trigonométricas:

	$sen\theta = \frac{b}{c}$ $cos\theta = \frac{a}{c}$ $tan\theta = \frac{b}{a}$

Ejemplo 3.

Dado el siguiente triangulo rectángulo, determina el valor del ángulo θ.



Solución:

Se conoce el valor de los dos catetos y se desconoce el valor de la hipotenusa.

Sustituyendo en las razones trigonométricas, se tiene que

$$sen\theta = \frac{8\ cm}{c}$$

$$cos\theta = \frac{6\ cm}{c}$$

$$tan\theta = \frac{8\ cm}{6\ cm}$$

Se puede observar que en el caso del seno y coseno tienen dos incógnitas cada una de las ecuaciones, de tal forma que para poder encontrar el valor del ángulo θ solo podemos (con los datos dados) utilizar la tangente.

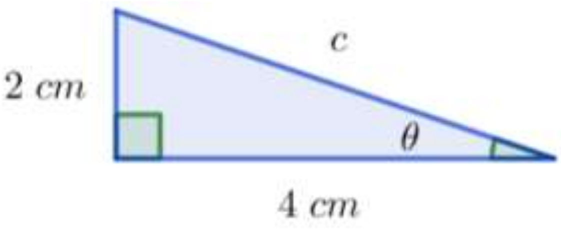
Despejando

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{8}{6}\right)$$
$$\theta = 58.13°$$

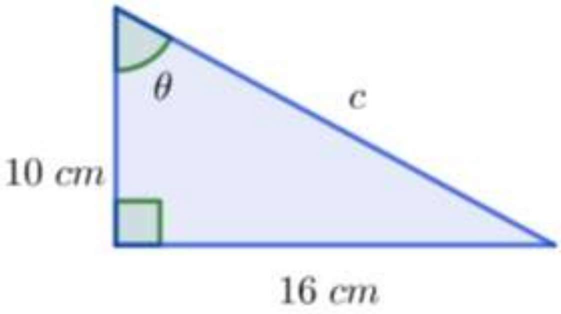
Ejercicio 4.1

1. Determina el valor del ángulo en cada caso

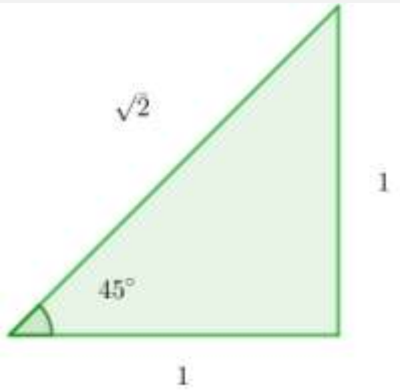
a)



b)

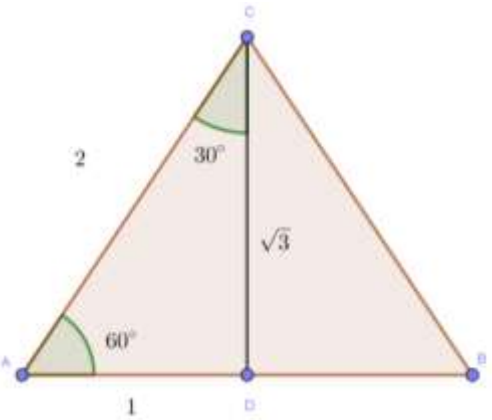


2. Considera un triángulo rectángulo isósceles como se muestra, enuncia las razones trigonométricas y coloca en la siguiente tabla la sustitución, como se muestra en el ejemplo:



ángulo	sen	cos	tan
$45°$	$sen45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$		

3. Construyamos un triángulo equilátero cuyos lados sean de 2 unidades. Los ángulos son de $60°$ y las bisectrices de los ángulos son también las medianas, que son perpendiculares al lado correspondiente , enuncia las razones trigonométricas y coloca en la siguiente tabla, como se muestra en el ejemplo:



ángulo	sen	cos	tan
$30°$	$\frac{1}{2}$		
$60°$			$\sqrt{3}$

De tal forma que, si se coloca en una tabla y se colocan más ángulos, se tiene lo siguiente.

Llena la tabla con los valores que faltan:

Valor del ángulo		**Funciones**		
Grados	**Radianes**	$\boldsymbol{sen}$	$\boldsymbol{cos}$	$\boldsymbol{tan}$
$0°$	0π	**0**	**1**	**0**
$30°$	$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	**1**
$60°$	$\frac{2\pi}{6}$			
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	**1**	**0**	
$120°$	$\frac{2\pi}{3}$			$-\sqrt{3}$
$135°$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$		
$150°$	$\frac{5\pi}{6}$			
$180°$			**-1**	
$210°$	$\frac{7\pi}{6}$			$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$225°$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		
$240°$	$\frac{4\pi}{3}$		$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$270°$		**-1**	**0**	
$300°$				
$315°$	$\frac{7\pi}{4}$			
$330°$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$360°$		**0**	**1**	**0**

4.4 Gráfica de funciones trigonométricas

Para trazar las gráficas de las funciones trigonométricas $f(x) = sen\theta$, $g(x) = cos\theta$ se consideran los valores de la variable independiente (θ)como las abscisas y los valores de las funciones como ordenadas; así que obtenemos una serie de puntos que al unirlos representan la gráfica de la función.

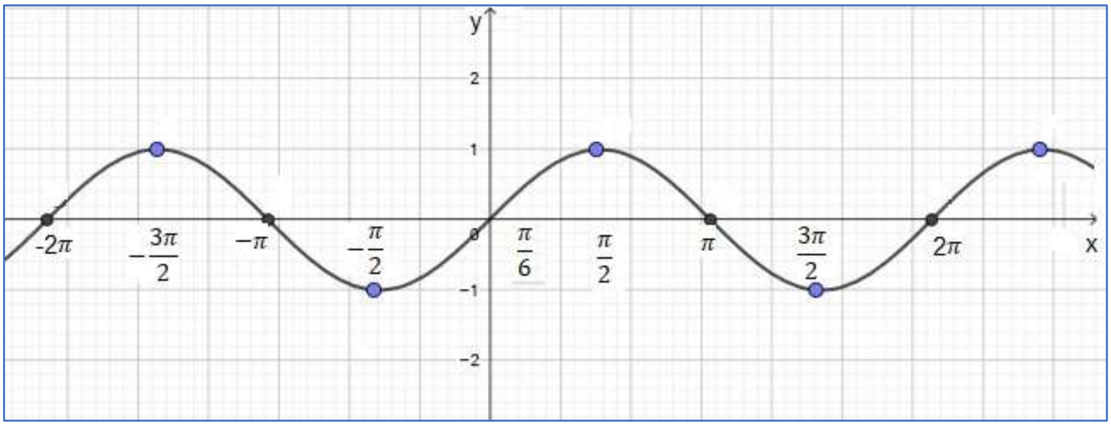
Ejemplo 4.

Gráfica de la función $f(x) = sen\theta$

Los valores del ángulo pueden ser en grados o en radianes como se muestra en la siguiente tabla.

θ	0º	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$sen\theta$	0	0.50	0.8660	1	0.8660	0.50	0

θ	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$sen\theta$	-0.50	-0.8660	-1	-0.8660	-0.50	0



gráfica 4. 2

Gráfica $f(x) = sen\theta$

Al lugar geométrico de la ecuación $y = sen\theta$ se llama sinusoide. Y sus intersecciones con el eje X son 0, $\pm\pi, \pm 2\pi\ y\ en\ n\pi,$ en donde n es un entero cualquiera. El único punto de intersección con el eje Y es el origen. La curva es simétrica con respecto al origen.

El dominio es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente x, son valores del ángulo en grados o radianes, de manera que se obtiene una imagen o un valor de la función trigonométrica.

Si se extienden los valores de la variable independiente tanto a la derecha como a la izquierda tenemos que el dominio es: D: $(-\infty,\ \infty)$

Los valores que toma la función seno varían de -1 hasta 1, sin importar el valor que se le asigne a la variable independiente; por lo que el rango es: R: $[-1, 1]$

En la gráfica $f(x) = sen\theta$ observamos que el lugar geométrico se repite idéntico para cada cambio de 2π radianes en el valor de x; se dice que tal curva es periódica. De manera más general se dice que si una función $f(x)$ tiene la propiedad de que

$$f(x) = f(x + p)$$

En donde p es una constante diferente de cero, entonces se dice que $f(x)$ es una función periódica, y al valor mínimo positivo de *p*, tal que la ecuación $f(x) = f(x + p)$ se siga cumpliendo.

Por lo tanto $sen\, x = f(x + 2\pi)$, así la gráfica es periódica con período 2π.

Propiedades de una función seno $\boldsymbol{y = senx}$

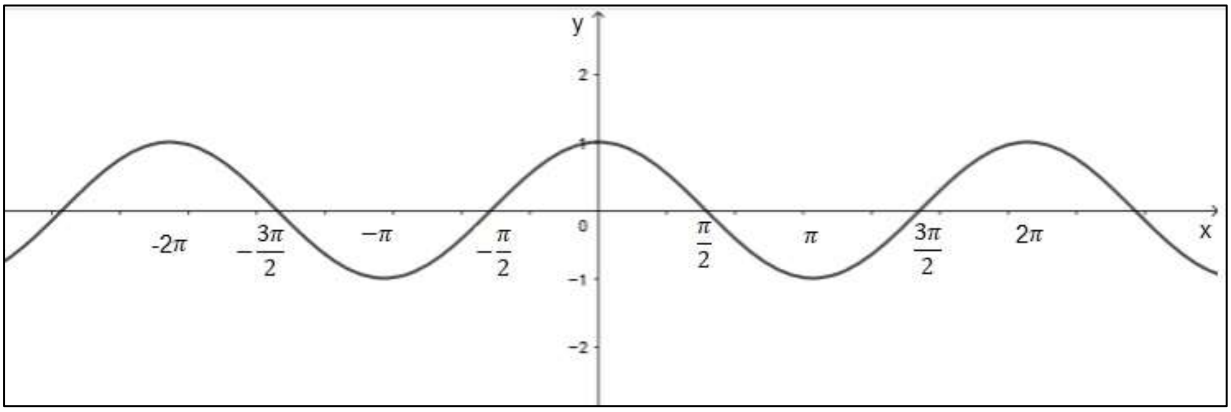
1. El dominio es el conjunto de todos los números reales
2. El rango consiste en todos los números reales de -1 a 1, incluidos.
3. La función seno es una función impar, como indica la simetría con respecto al origen de la gráfica.
4. La función seno es periódica, con periodo 2π.
5. sus intersecciones con el eje x son,$\ldots -2\pi - \pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi$ ... $y\ en \pm n\pi$; las intersecciones en y es 0.
6. El valor máximo es 1 y se da en $x = \cdots, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots$; el valor mínimo es -1y se da en $x = \cdots, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \ldots$

Gráfica de la función $f(x) = cos\theta$

Los valores del ángulo pueden ser en grados o en radianes como se muestra en la siguiente tabla.

θ	0º	$\frac{\pi}{6} = 30º$	$\frac{\pi}{3} = 60º$	$\frac{\pi}{2} = 90º$	$\frac{2\pi}{3} = 120º$	$\frac{5\pi}{6} = 150º$	$\pi = 180º$
$cos\theta$	1	0.8660	0.50	0	-0.50	0.8660	-1

θ	$\frac{7\pi}{6} = 210º$	$\frac{4\pi}{3} = 240º$	$\frac{3\pi}{2} = 270º$	$\frac{5\pi}{3} = 300º$	$\frac{11\pi}{6} = 330º$	$2\pi = 360º$
$cos\theta$	-0.8660	-0.50	0	0.5	0.8660	1



gráfica 4. 3

Gráfica $f(x) = cos\theta$

El dominio de la función coseno es $D: (-\infty,\ \infty)$ y su rango es $R: [-1, 1]$, amplitud 1 y período 2π.

Propiedades de una función coseno $\boldsymbol{y = cosx}$

1. El dominio es el conjunto de todos los números reales
2. El rango consiste en todos los números reales de -1 a 1, incluidos.
3. La función coseno es una función par, como indica la simetría con respecto al eje y de la gráfica.
4. La función seno es periódica, con periodo 2π.
5. Sus intersecciones con el eje x son, …, $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ …, la intersección en y es 1.
6. El valor máximo es 1 y se da en $-2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi,$ … ;el valor mínimo es -1y se da en $x = \cdots, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi,$ …

4.5 Análisis del comportamiento de la gráfica respecto de los parámetros A, B, C y D

Periodo y Amplitud de una sinusoide

Se tiene la ecuación general $y = A\ sen\ (Bx +\ C) + D$, en donde $A, B, C y\ D$ son constantes. La amplitud de la curva es igual a $|A|$; por esto, la cantidad A se llama factor de amplitud.

Un ciclo completo del lugar geométrico de la ecuación general se obtiene cuando el ángulo $Bx +\ C$ varía en 2π radianes. Como $B\ y\ C$ son constantes, esta variación puede efectuarse solamente alterando el valor de x. entonces el período lo podemos obtener con la siguiente ecuación: $T = \frac{2\pi}{B}$

Ejemplo 5.

Determinar el periodo y la amplitud de la función $f(x) = 3sen(4x)$

Solución:

Si comparamos $f(x) = 3sen(4x)$ con $f(x) = Asen(Bx)$, determinamos que:

Amplitud $\quad A = |3| \qquad A = 3$

Periodo $\quad T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

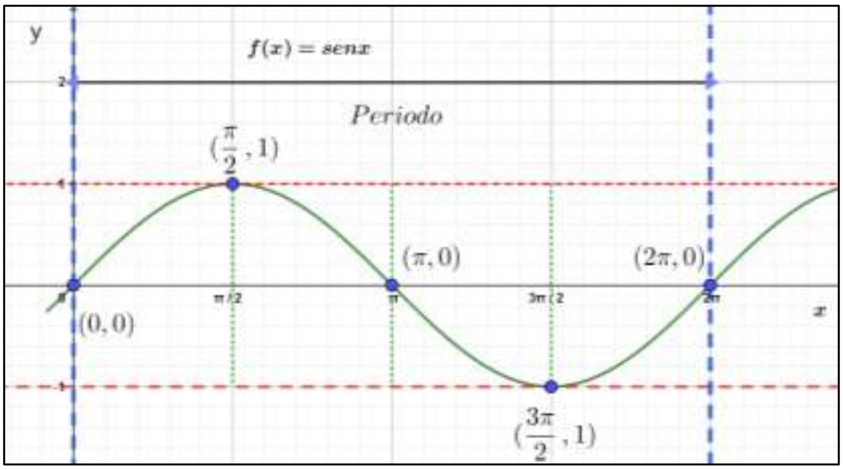
Para trazar la gráfica de funciones sinusoidales usando puntos clave, $f(x) = Asen(Bx)$ o $f(x) = Acos(Bx)$.

En las figuras siguientes, se muestra un ciclo de las gráficas de $f(x) = sen\, x$, $f(x) = cos\, x$ en el intervalo $[0,2\pi]$. Se puede observar que cada grafica consiste en cuatro partes correspondientes a los cuatro subintervalos:

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]., \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]., \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

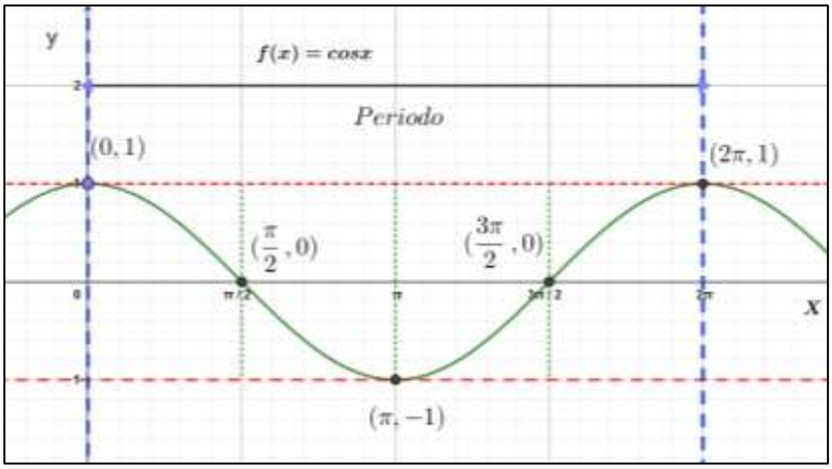
Cada uno de los subintervalos es de longitud $\frac{\pi}{2}$(es decir, el periodo 2π dividido entre 4, el número de partes) y los puntos terminales de estos intervalos $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = 2\pi$ dan origen a los cinco puntos clave en cada gráfica.

Para $y = sen\, x \quad (0,0), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), (\pi, 0), \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), (2\pi, 0)$



gráfica 4. 4

Para $y = cos\ x$ $\quad (0,1), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), (\pi, -1), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), (2\pi, 1)$



gráfica 4. 5

Para trazar una gráfica de un seno o coseno

$f(x) = Asen(Bx + C) + D$ o $f(x) = Acos(Bx + C) + D$ debemos contemplar lo siguiente

A	Amplitud $\quad A = \|A\|$
B	Periodo $\quad T = \frac{2\pi}{B}$
C	Desplazamiento horizontal $\frac{\|C\|}{B}$, el desplazamiento es hacia la derecha si $C < 0$ y hacia la izquierda si $C > 0$ (*desplazamiento de fase*)
D	Desplazamiento vertical (arriba si $D > 0$, abajo si $D < 0$)

Ejemplo 6.

Tazar la gráfica de la función $f(x) = 3sen(4x)$

Solución:

Primero hay que determinar la amplitud y el periodo de la función.

Amplitud $\quad A = |3| \qquad\qquad A = 3$

Periodo $\quad T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Como la amplitud es 3, la gráfica de la función estará entre -3 y 3 en el eje y. Como el periodo es $\frac{\pi}{2}$ un ciclo empezará en $x = 0$ y terminará en $x = \frac{\pi}{2}$.

El intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en cuatro subintervalos, cada uno de longitud $\frac{\pi}{2} \div 4 = \frac{\pi}{8}$, de la siguiente manera: $\left[0, \frac{\pi}{8}\right], \left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right], \left[\frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\right]$ es decir $\left[0, \frac{\pi}{8}\right], \left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}\right], \left[\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right]$

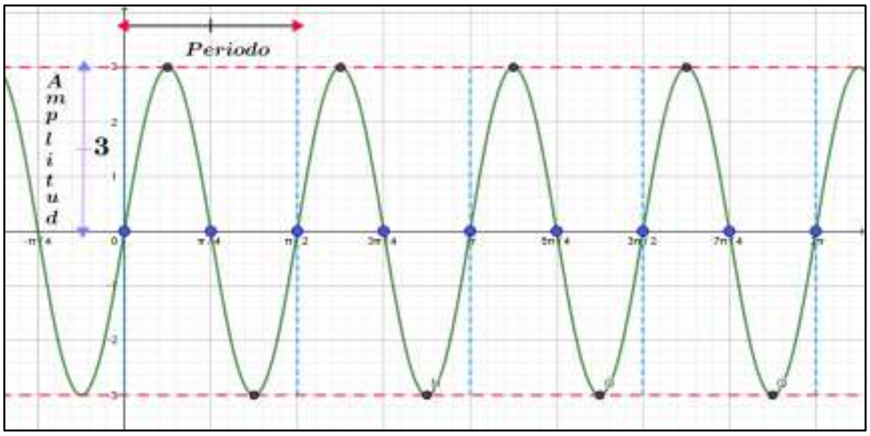
Los puntos terminales de los subintervalos son $0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}$. Estos valores representan las coordenadas x de los 5 puntos clave de la gráfica.

Para obtener las coordenadas y de los 5 puntos clave $f(x) = 3sen(4x)$, multiplica las coordenadas y de los 5 puntos clave por $f(x) = sen(x)$, por $A = 3$ esto es

$f(x) = sen\,x \quad (0,0), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), (\pi, 0), \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), (2\pi, 0)$

$f(x) = 3sen(4x) \quad (0, \mathbf{0}), \left(\frac{\pi}{8}, \mathbf{3}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \mathbf{0}\right), \left(\frac{3\pi}{8}, \mathbf{-3}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \mathbf{0}\right)$

Finalmente traza los 5 puntos clave y llena la gráfica de la curva.



gráfica 4. 6

Su dominio y su rango es $D: (-\infty, \infty)$ y su rango es $R: [-3, 3]$

Ejemplo 7.

Tazar la gráfica de la función $f(x) = 2\cos(2x)$

Solución:

Primero hay que determinar la amplitud y el periodo de la función.

Amplitud $\quad A = |2| \qquad A = 2$

Periodo $\quad T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Como la amplitud es 2, la gráfica de la función estará entre -2 y 2 en el eje y. Como el periodo es π un ciclo empezará en $x = 0$ y terminará en $x = \pi$.

El intervalo $[0, \pi]$ en cuatro subintervalos, cada uno de longitud $\pi \div 4 = \frac{\pi}{4}$, de la siguiente manera: $\left[0, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right]$ es decir $\left[0, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right], \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

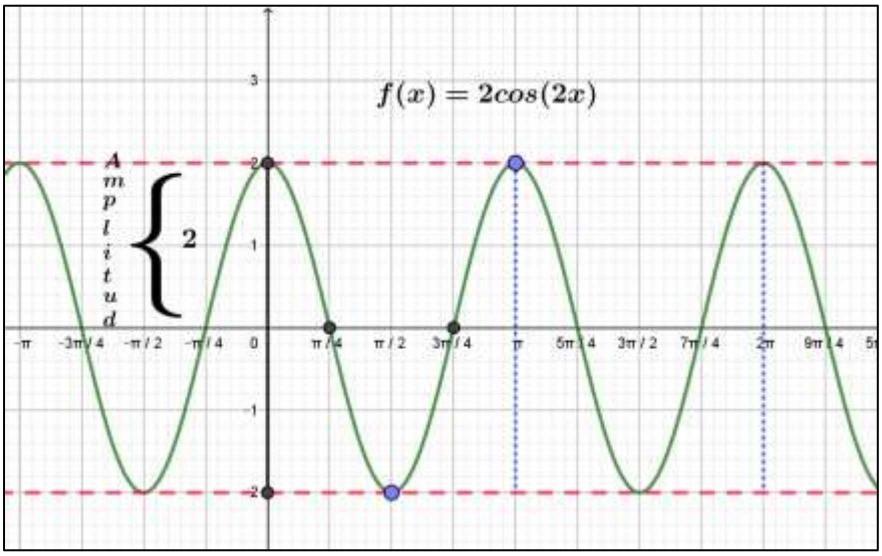
Los puntos terminales de los subintervalos son $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$. Estos valores representan las coordenadas x de los 5 puntos clave de la gráfica.

Para obtener las coordenadas y de los 5 puntos clave $f(x) = 2cos(2x)$, multiplica las coordenadas y de los 5 puntos clave por $f(x) = cos(x)$, por $A = 2$ esto es

Para $f(x) = cos\ x$ $\quad (0,1), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), (\pi, -1), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), (2\pi, 1)$

$f(x) = 2\cos(2x)$ $\quad (0, \mathbf{2}), \left(\frac{\pi}{4}, \mathbf{0}\right), \left(\frac{\pi}{2}, -\mathbf{2}\right), \left(\frac{3\pi}{4}, \mathbf{0}\right), (\pi, \mathbf{2})$

Finalmente traza los 5 puntos clave y llena la gráfica de la curva.



gráfica 4. 7

Su dominio y su rango es D: $(-\infty,\ \infty)$ y su rango es R: $[-2, 2]$

Ejemplo 8.

Tazar la gráfica de la función $f(x) = 2sen(2x) - 1$

Solución:

Observando la ecuación se tiene que : $A = 2, B = 2\ C = 0\ y\ D = -1$

D Desplazamiento vertical (arriba si $D > 0$, abajo si $D < 0$)

Amplitud $\quad A = |2| \qquad A = 2$

Periodo $\quad T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Como la amplitud es 2, la gráfica de la función estará entre $-2 + D\ y\ 2 + D$ en el eje y. Como el periodo es π un ciclo empezará en $x = 0$ y terminará en $x = \pi$.

El intervalo $[0, \pi]$ en cuatro subintervalos, cada uno de longitud $\pi \div 4 = \frac{\pi}{4}$, de la siguiente manera: $\left[0, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right]$ es decir $\left[0, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right], \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

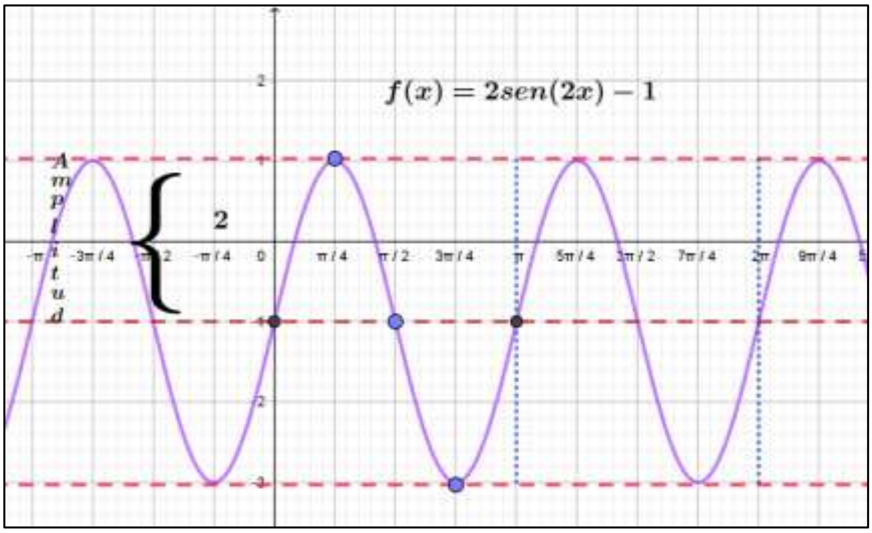
Los puntos terminales de los subintervalos son $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$. Estos valores representan las coordenadas x de los 5 puntos clave de la gráfica.

Para obtener las coordenadas y de los 5 puntos clave $f(x) = 2sen(2x) - 1$, multiplica las coordenadas y de los 5 puntos clave por $f(x) = sen(x)$, por $A = 2 \; + \; D$ esto es

$f(x) = sen\, x \qquad (0{,}0), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), (\pi, 0), \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), (2\pi, 0)$

$f(x) = 2sen(2x) - 1 \quad (0, -\mathbf{1}), \left(\frac{\pi}{4}, \mathbf{1}\right), \left(\frac{\pi}{2}, -\mathbf{1}\right), \left(\frac{3\pi}{4}, -\mathbf{3}\right), (\pi, -\mathbf{1})$

Finalmente traza los 5 puntos clave y llena la gráfica de la curva.



gráfica 4. 8

Su dominio y su rango es D: $(-\infty, \; \infty)$ y su rango es R: $[-3, 1]$

Ejemplo 9.

Tazar la gráfica de la función $f(x) = 3sen(2x + \pi) + 1$

Solución:

Observando la ecuación se tiene que : $A = 3, B = 2\ C = \pi\ y\ D = 1$

- C Desplazamiento horizontal $\frac{|C|}{B}$, el desplazamiento es hacia la derecha si $C < 0$ y hacia la izquierda si $C > 0$ (*desplazamiento de fase*)
- D Desplazamiento vertical (arriba si $D > 0$, abajo si $D < 0$)

Amplitud $A = |3|$ $A = 3$

Periodo $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Como la amplitud es 3, la gráfica de la función estará entre $-3 + D\ y\ 3 + D$ en el eje y. Como el periodo es π y el desplazamiento horizontal es $\frac{|C|}{B}$, $\frac{|\pi|}{2}$ la grafica se desplaza hacia la derecha a $-\frac{\pi}{2}$ un ciclo empezará en $x = -\frac{\pi}{2}$ y terminará en $x = \frac{\pi}{2}$.

El intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ en cuatro subintervalos, cada uno de longitud $\pi \div 4 = \frac{\pi}{4}$, de la siguiente manera:$\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right], \left[-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right], \left[0{,}0 + \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right]$ es decir $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right], \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right], \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

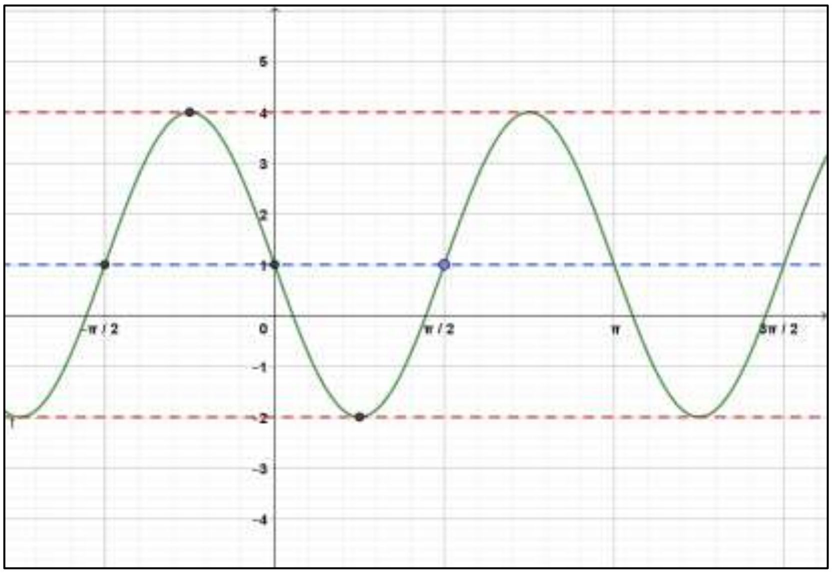
Los puntos terminales de los subintervalos son $-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$. Estos valores representan las coordenadas $x - C$ de los 5 puntos clave de la gráfica.

Para obtener las coordenadas y de los 5 puntos clave $f(x) = 3sen(2x + \pi) + 1$, multiplica las coordenadas y de los 5 puntos clave por $f(x) = sen(x)$, por $A = 3\ y\ +\ D$ esto es

$f(x) = sen\ x$ $(0{,}0), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), (\pi, 0), \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), (2\pi, 0)$

$f(x) = 3sen(2x + \pi) + 1$ $\left(-\frac{\pi}{2}, \mathbf{1}\right), \left(-\frac{\pi}{4}, \mathbf{4}\right), (0, \mathbf{1}), \left(\frac{\pi}{4}, \mathbf{-2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \mathbf{1}\right)$

Finalmente traza los 5 puntos clave y llena la gráfica de la curva.



gráfica 4. 9

Su dominio y su rango es D: $(-\infty,\ \infty)$ y su rango es R: $[-2, 4]$

Ejercicio 4.2

Traza la gráfica de las funciones y determina su amplitud, periodo, dominio y rango, así como su desplazamiento de fase.

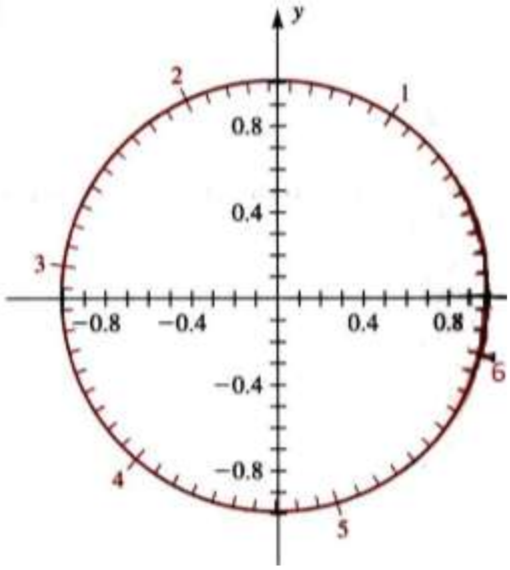
1. $f(x) = 2\ sen\ \ 3x$
2. $f(x) = 3\ sen\ \ \frac{3}{4}x$
3. $f(x) = 2sen\left(-\frac{1}{2}x\right)$
4. $f(x) = 3\cos(2x)$
5. $f(x) = -2sen(2x) + 5$
6. $f(x) = 2cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$
7. $f(x) = sen\ \ \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
8. $f(x) = \cos x - 5$

Problemas de aplicación funciones trigonométricas

Aprendizaje:

Utiliza las funciones trigonométricas para representar fenómenos de variación periódica.

1. Aproxima los siguientes valores a un lugar decimal, considerando la imagen que se muestra a continuación.



a) Sen (4)
b) Sen (-1.2)
c) Sen (2)
d) Sen(-2.3)
e) Todos los valores entre 0 y 2π tales que Sen(A)=0.5
f) Todos los valores entre 0 y 2π tales que Sen(A)=-0.2

2. El 17 de marzo de 1981, en Tucson Arizona, la temperatura en grados Fahrenheit se pudo describir mediante la ecuación

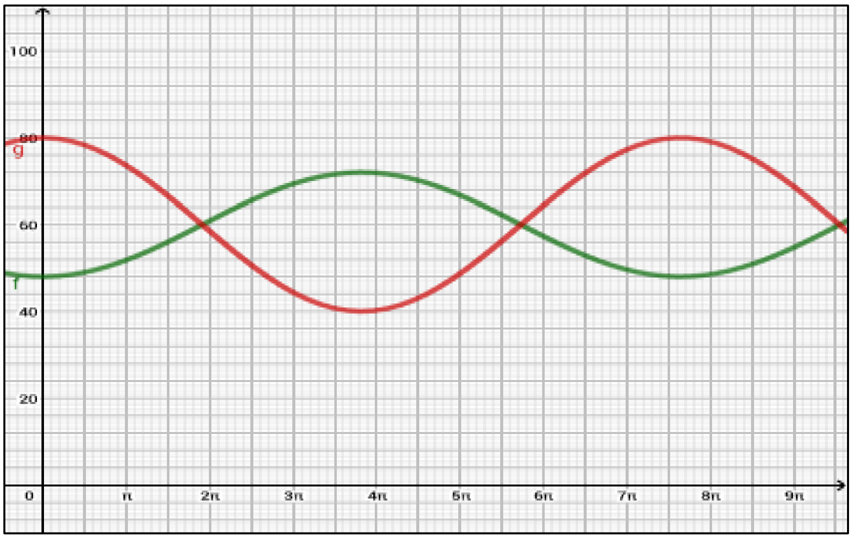
$$T(t) = -12\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) + 60$$

En tanto que la humedad relativa en porcentaje se pudo expresar mediante

$$H(t) = 20\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) + 60$$

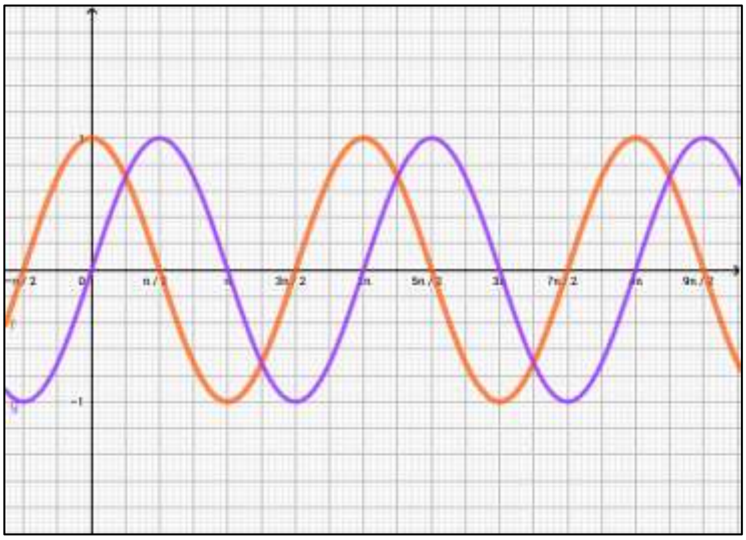
t está en horas y t=0 corresponde a las 6 a.m.

a) Construye una tabla que haga una lista de las temperaturas y humedad relativa cada tres horas, comenzando a la media noche.
b) Determina las horas cuando se presentaron los valores máximos y mínimos para T y H.
c) Analiza la relación entre la temperatura y la humedad relativa en ese día.



3. Consulta la gráfica de $y = Sen(x)$ o $y = Cos(x)$ para hallar los valores exactos de t en el intervalo $[0,4\pi]$ que satisfaga la ecuación.

$a)\ Sen(x) = -1$	b) $Sen(x) = \frac{1}{2}$	c) $Sen(x) = 1$	d) $Sen(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $Cos(x) = -1$	f) $Cos(x) = -\frac{1}{2}$	g) $Cos(x) = 1$	h) $Cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$



f(x)=Sen x y f(x)=Cos x

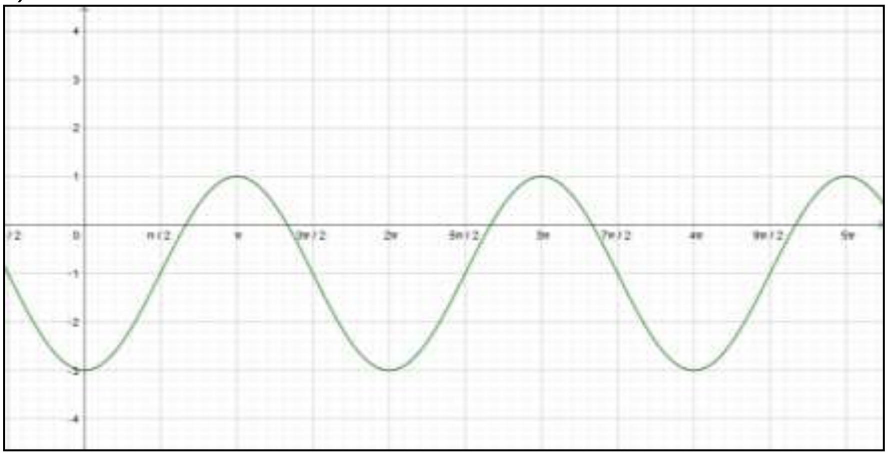
Autoevaluación de la unidad IV.

1. Suponiendo que un árbol mide 10m, y que un hombre está a una distancia de 4m del árbol, encuentra el ángulo de elevación que se forma.

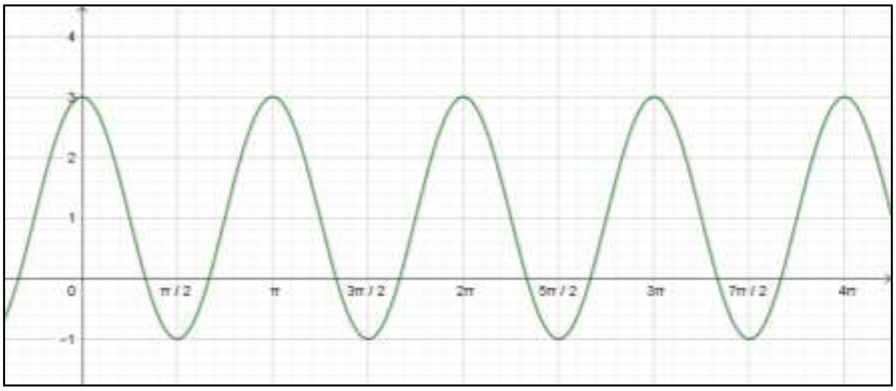
2. Identifique la gráfica de la Función utilizando los parámetros correspondientes

$$f(x) = 2sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$$

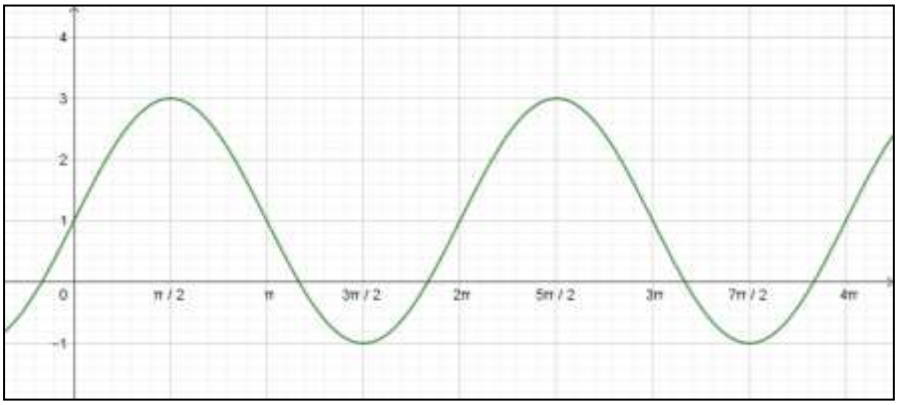
a)



b)



c)



3. Encuentre los parámetros de amplitud, periodo, desplazamiento vertical y horizontal para dibujar la gráfica de la siguiente Función:

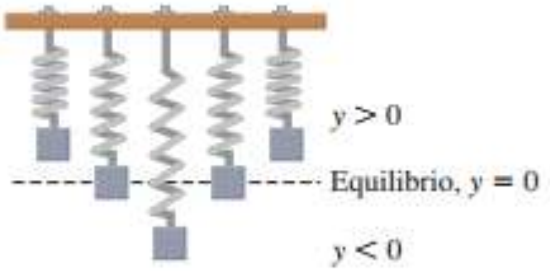
$$f(x) = 2\cos\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{4}\right) + 3$$

4. Traza la gráfica de la siguiente función utilizando los 5 puntos clave

$$f(x) = -3\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) + 5$$

5. El desplazamiento a partir del equilibrio de una masa oscilante unida a un resorte está dado por $y(t) = 4cos3\pi t$, donde y se mide en pulgadas y t en segundos. Encuentre el desplazamiento en los tiempos indicados en la tabla.

t	$y(t)$
0	
0.25	
0.50	
0.75	
1.0	
1.25	



Solución a los ejercicios de la unidad IV

4.1

1.

a) $\theta = 30°$

b) $\theta = 60°$

2.

ángulo	$\boldsymbol{sen}$	$\boldsymbol{cos}$	$\boldsymbol{tan}$
$\mathbf{45°}$	$\boldsymbol{Sen45° = \frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\boldsymbol{Cos45° = \frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\boldsymbol{Tan45° = 1}$

3.

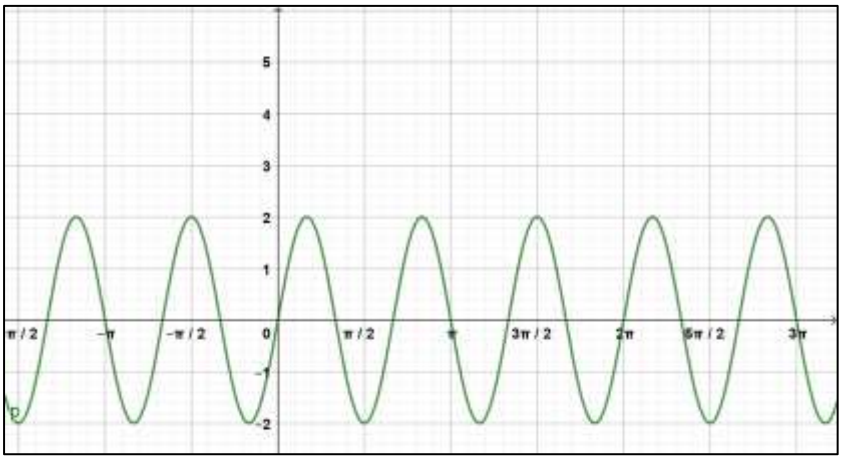
Valor del ángulo		Funciones		
Grados	Radianes	$\boldsymbol{sen}$	$\boldsymbol{cos}$	$\boldsymbol{tan}$
$0°$	0π	**0**	**1**	**0**
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$		$\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$
$45°$	$\frac{\pi}{6}$	$\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	**1**
$60°$	$\frac{2\pi}{6}$	$\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	**1**	**0**	**Indefinido**
$120°$	$\frac{2\pi}{3}$	$\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$-\frac{1}{2}$	$\boldsymbol{-\sqrt{3}}$
$135°$	$\frac{3\pi}{4}$	$\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\boldsymbol{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$	**-1**
$150°$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$
$180°$		**0**	**-1**	**0**
$210°$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$
$225°$	$\frac{\pi}{6}$	$\boldsymbol{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\boldsymbol{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$	**1**
$240°$	$\frac{4\pi}{3}$	$\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}}$
$270°$	$\frac{\pi}{6}$	**-1**	**0**	**indefinido**
$300°$	$\frac{\pi}{6}$	$\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\boldsymbol{-\sqrt{3}}$

$315°$	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	**-1**
$330°$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$360°$	$\frac{\pi}{6}$	**0**	**1**	**0**

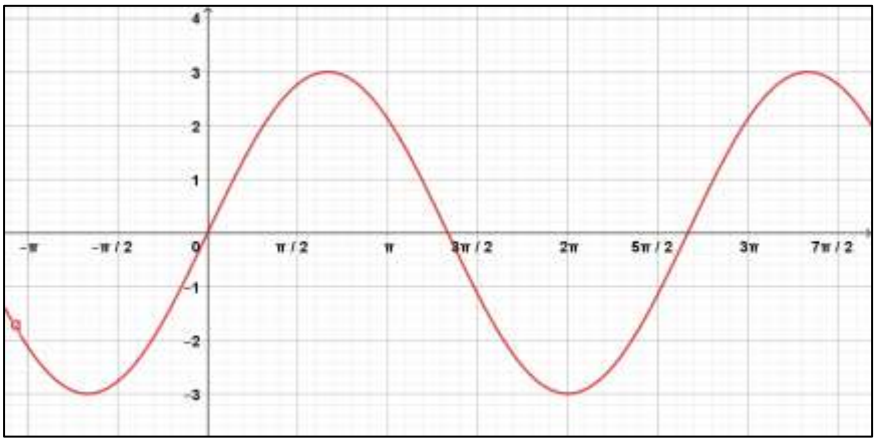
Ejercicio 4.2

Solución:

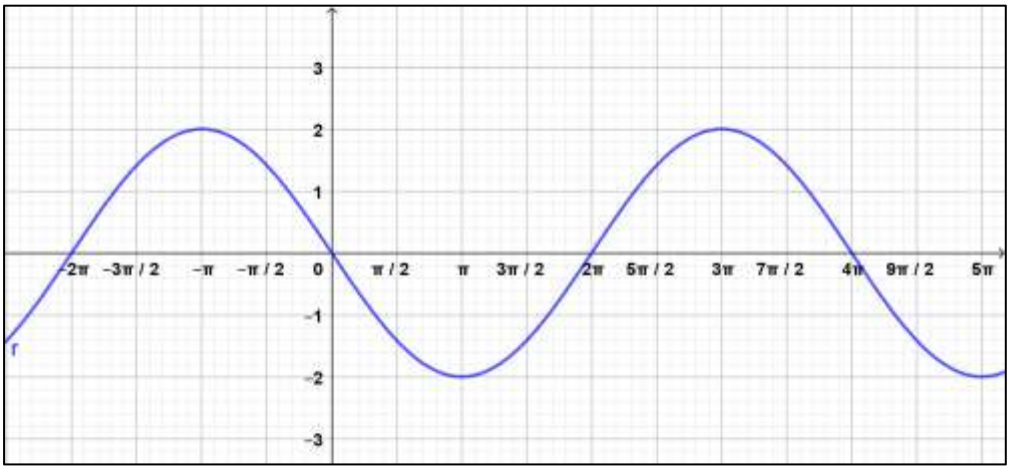
1. Amplitud = 2, Periodo = $\frac{2\pi}{3}$, D: $(-\infty,\ \infty)$ y su rango es R: $[-2, 2]$



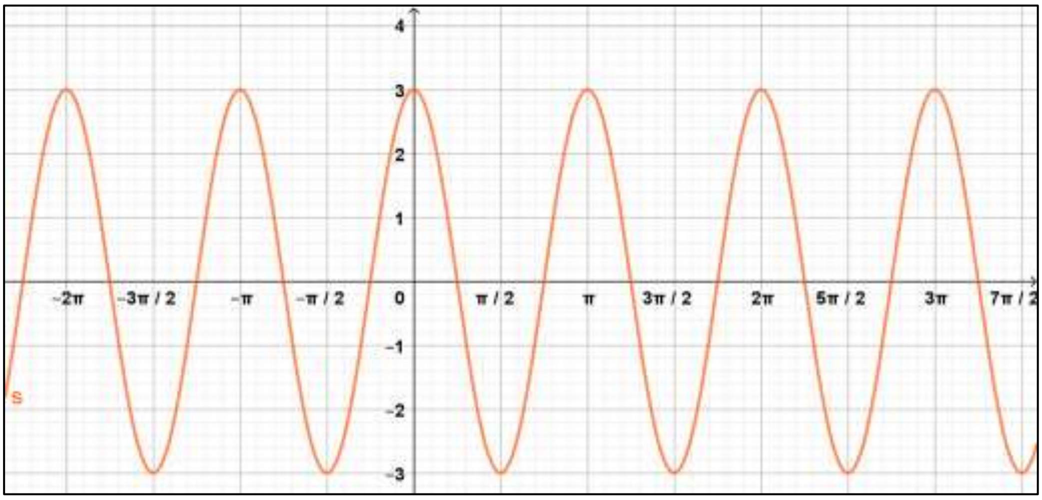
2. Amplitud = 3, Periodo = $\frac{8\pi}{3}$, D: $(-\infty,\ \infty)$ y su rango es R: $[-3, 3]$



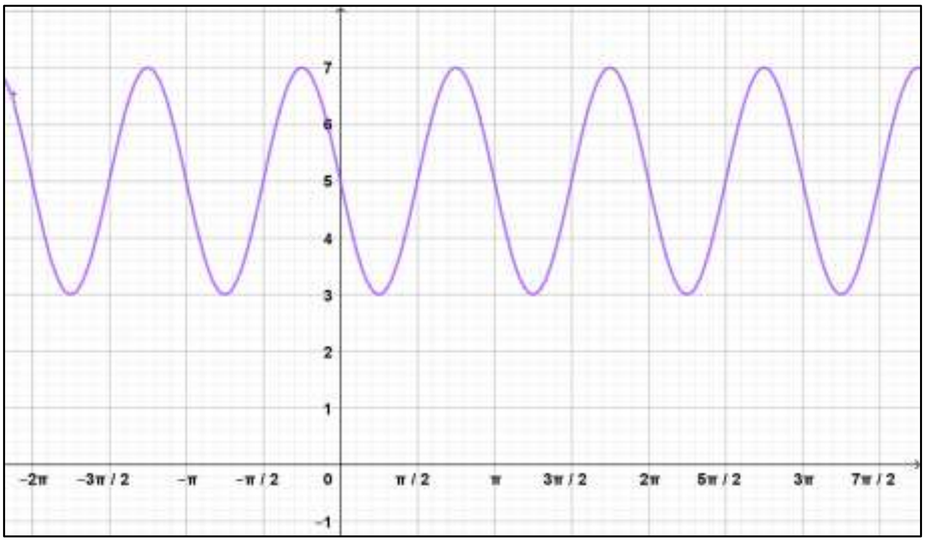
3. Amplitud = 2, Periodo = 4π, $D: (-\infty,\ \infty)$ y su rango es $R: [-2, 2]$



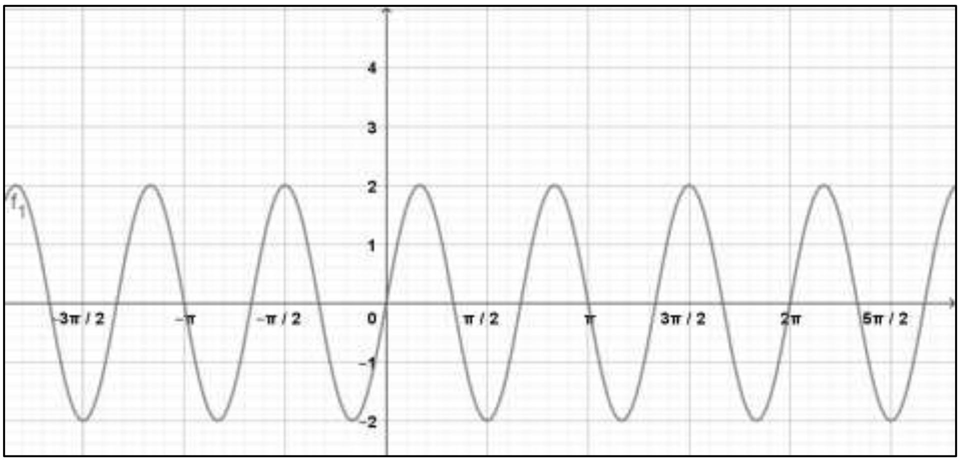
4. Amplitud = 3, Periodo = π, $D: (-\infty,\ \infty)$ y su rango es $R: [-3, 3]$



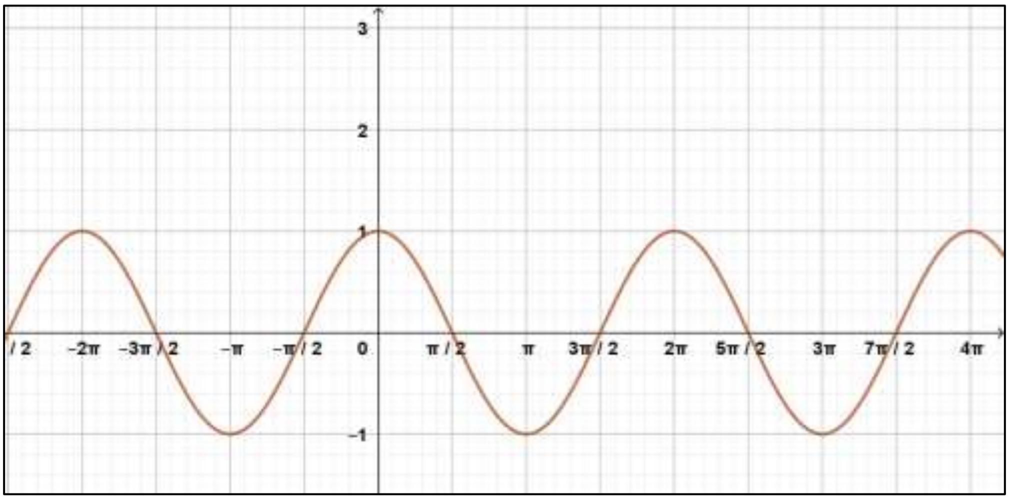
5. Amplitud = 2, Periodo = π, desplazamiento 5 hacia arriba, $D: (-\infty,\ \infty)$ y su rango es $R: [3, 7]$



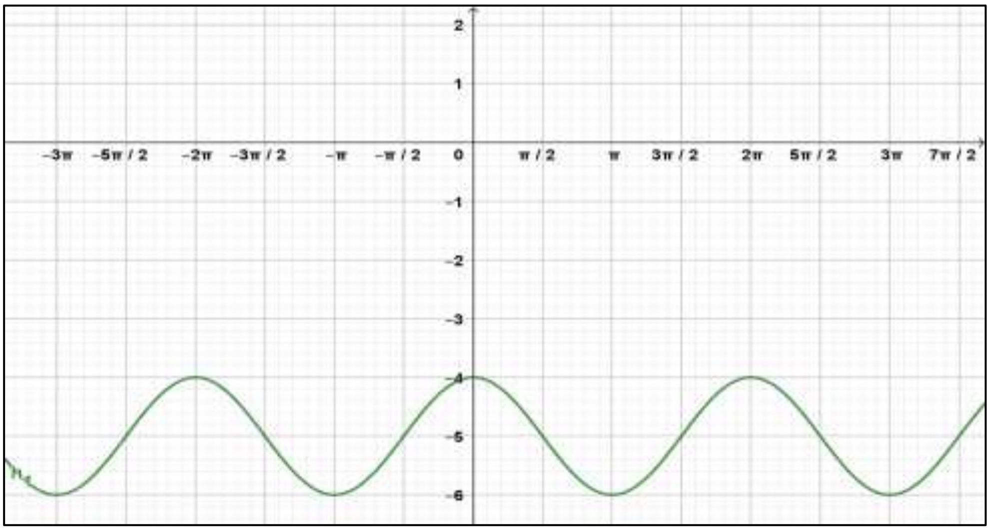
6. Amplitud = 2, Periodo = $=\frac{2\pi}{3}$, desplazamiento de fase $\frac{\pi}{2}$ radianes a la derecha, $D: (-\infty,\ \infty)$ y su rango es $R: [-2, 2]$



7. Amplitud = 1, Periodo = 2π, desplazamiento de fase $\frac{\pi}{2}$ radianes a la izquierda, $D: (-\infty,\ \infty)$ y su rango es $R: [-1, 1]$



8. Amplitud = 1, Periodo = 2π, desplazamiento 5 hacia abajo, $D: (-\infty,\ \infty)$ y su rango es $R: [-6, -4]$

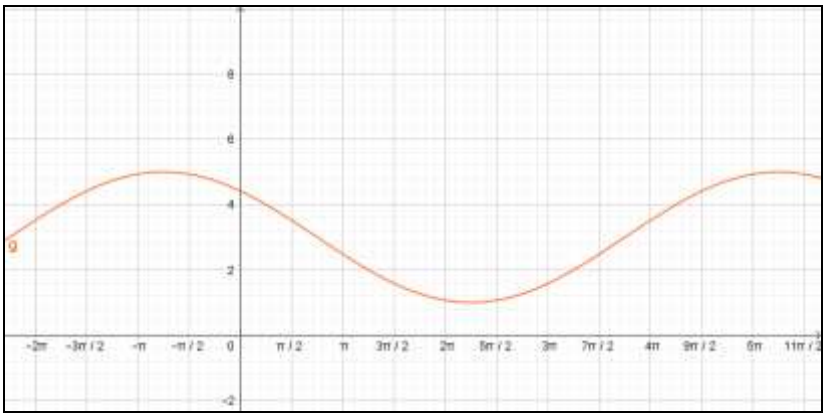


Solución a la autoevaluación de la unidad IV

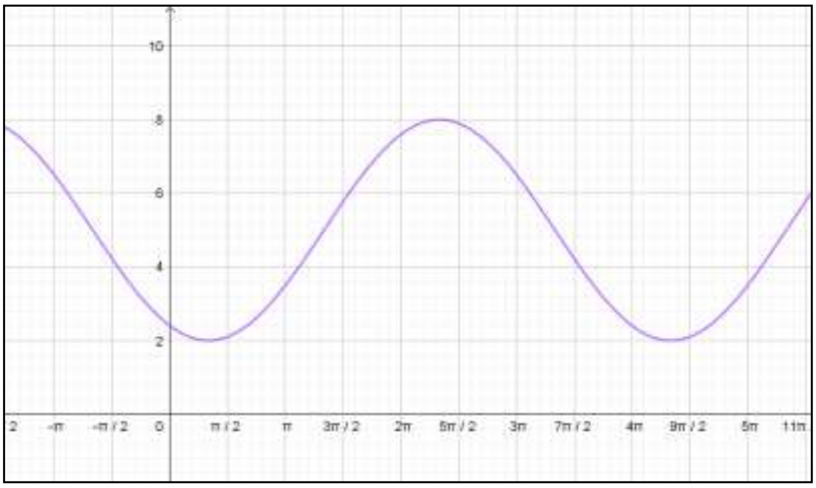
I. $\tan^{-1}\left(\frac{10}{4}\right)$

II. a)

III.



IV.



V.

t	$y(t)$
0	4
0.25	-2.83
0.50	0
0.75	2.83
1.0	-4
1.25	2.83

Referencias

- Barnett Raymond, et al. Precálculo: Funciones y Graficas, Mc Graw-Hill, México, 2000.
- Ejercicios adicionales para funciones exponenciales, recuperado el 2 de Junio del 2017 http://www.slideshare.net/crashandburn/ejercicios-adicionales-para-practicar-funciones-exponenciales
- Hirupedia, recuperado el 5 de Junio del 2017 http://www.hiru.com/matematicas/funcion-exponencial
- Lehman, CH. (1997). Geometría Analítica. CDMX. México. Ed. Limusa Noriega Editores
- Matemáticas Básicas, recuperado el 5 de Junio del 2017 http://www.fca.unam.mx/docs/apuntes_matematicas/16.%20Funciones%20Exponencial%20y%20Logaritmica.pdf
- Reyes Esparza Alejandro (2004). *Guía de Matemáticas IV.* material de Apoyo para el profesor.
- Stanley A. Smith, Randall I. Charles, John A. Dossey. (1998). Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica. México: Pearson Educación.
- Stewart, James/Lothar Redlin y Saleem Watson. Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Sexta Edición.
- Sullivan, Michael. Precálculo, Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1997.
- Swokoswski, Earl W. (2011). *Álgebra y Trigonometría con geometría analítica (*13a. ed). México:Thomson Editores, S.A. de C.V.
- Swokowski, E. y Cole, J. (2001). Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica. México: Cengage Learning.