Universidad Nacional Autónoma de México

Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades

Plantel Sur

Academia de Matemáticas

Guía

Para presentar el examen extraordinario de

Cálculo Diferencial e Integral II

Elaborada por:

Matilde Yukie Suzuki Hayakawa

Karen Alejandra Carmona Romero

Martín Eduardo Monterrosa Hernández

Francisco Díaz Cerón

agosto de 2019

Tabla de contenido

Cómo utilizar esta guía

Estimado lector, esta guía es el resultado del trabajo entusiasta de profesores que buscamos incidir de forma positiva en el área de Matemáticas, específicamente en Cálculo Diferencial e Integral. Principalmente va dirigida a estudiantes que deseen prepararse para presentar el examen extraordinario de la asignatura, aunque consideramos que por la variedad de ejercicios que se manejan, puede apoyar también a los colegas, usando la guía como material complementario para sus clases, pues cubre los aprendizajes del programa actual de Cálculo II, en la ENCCH.

En la guía abordamos la parte conceptual de la asignatura, y con mayor énfasis la resolución de variados ejercicios que buscan desarrollar en los estudiantes más que la mecanización, la reflexión de algunas técnicas empleadas en Cálculo. Por ello, los ejemplos propuestos van incrementando gradualmente su dificultad, agregando variantes que pongan a prueba al estudiante. Dichos ejemplos cuentan con un procedimiento de solución detallado, donde se va explicando el porqué de cada paso.

Un plus que ofrece este material es que todos los ejemplos, presentan una retroalimentación y no solo buscan la solución del ejercicio, sino motivar el cuestionamiento y la búsqueda de distintas alternativas, contrastando unas con otras. Con el fin de que el alumno valore si su preparación va por buen camino, ponemos a su disposición una gran cantidad de ejercicios, todos con la respuesta a la que se debe llegar. Además, al final de la guía diseñamos una prueba donde se evalúa la adquisición de los aprendizajes propuestos.

Te recomendamos que, para tener un mejor aprovechamiento de la guía, acudas al Programa de Asesorías de tu plantel, para recibir atención personalizada y específica en tus dudas.

Finalmente, solicitamos que hagas uso eficiente de este trabajo, poniendo tu mejor esfuerzo en tu preparación, ya que un resultado satisfactorio para ti será nuestra mayor gratificación.

Cualquier duda u observación acerca de la guía, te agradeceremos que nos la hagas saber a los profesores Matilde Suzuki, Karen Carmona, Francisco Díaz y Martín Monterrosa, por medio de la Academia de Matemáticas del CCH Sur (edificio F, planta alta). ¡Mucho éxito!

Atentamente

Academia de Matemáticas, CCH Sur

Unidad 1. Derivada de funciones trascendentes

Presentación

En esta sección encontrarás algunas propiedades de las funciones trascendentes, sus derivadas, algunos ejemplos representativos resueltos y series de ejercicios que ampliarán tu conocimiento de la derivada, ahora con las funciones **trigonométricas, logarítmicas y exponenciales**, reforzando el estudio de los fenómenos en los que se experimentan variaciones y cambios como podrás observar en las diferentes situaciones en las que estas funciones se utilizan con regularidad en la vida cotidiana.

Al finalizar la unidad el alumno ampliará su conocimiento de la derivada, a las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas y reforzará el estudio de la variación al resolver problemas que se modelan con ellas.

Funciones trascendentes

En Cálculo Diferencial e Integral I se estudiaron las derivadas de funciones algebraicas, ahora en Cálculo Diferencial e Integral II se desarrollará con el estudio de las derivadas de las funciones trascendentes.

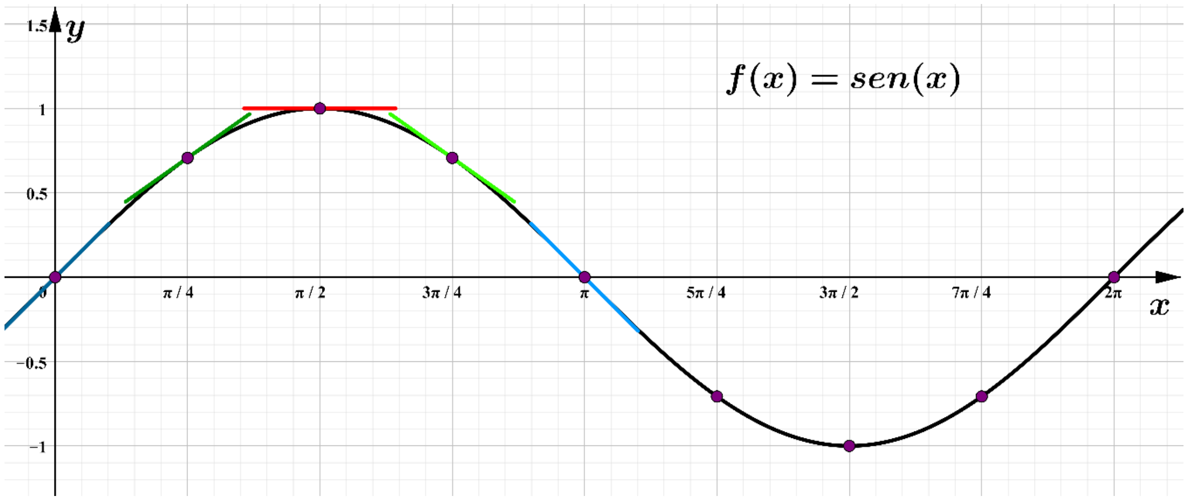
Este tipo de funciones se distinguen por ser de diferente naturaleza que las algebraicas, esto es, las funciones que no son algebraicas son trascendentes. La clase de las funciones trascendentes incluyen las funciones trigonométricas, logarítmicas, exponenciales, funciones trigonométricas inversas y muchas otras que no son tan familiares, pero se pueden clasificar así:

$$\text{Funciones}\begin{cases}\text{Algebraicas} & \begin{cases}\text{Polinomiales}\\ \text{Racionales}\\ \text{Con radicales}\end{cases}\\[2ex] \text{Trascendentes} & \begin{cases}\text{Trigonométricas}\\ \text{Logarítmicas}\\ \text{Exponenciales}\end{cases}\end{cases}$$

Anteriormente se han tratado funciones algebraicas como $f(x) = 2x^3$, $g(x) = \left(\frac{3x-5}{2x-1}\right)^7$, $h(x) = x^{\frac{2}{9}}$ donde la variable está en la base y el exponente es una constante, por el contrario, en una función trascendente, la variable se encuentra en el argumento de la función.

Para comenzar se darán las definiciones, propiedades y algunas identidades de las funciones trascendentes que serán de gran utilidad para complementar el estudio de la derivada.

Las funciones trigonométricas



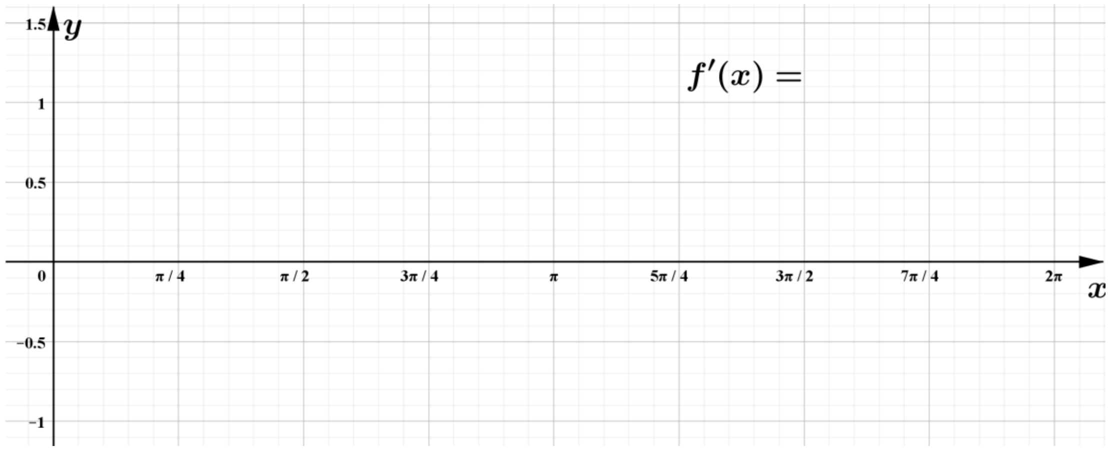
Gráfica de la función $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ y segmentos de rectas tangentes en varios puntos de la gráfica.

En la figura anterior se muestra la función $f(x) = sen\ (x)$ y en distintos puntos de la gráfica un segmento de la recta tangente. La tabla que se muestra a continuación contiene valores de x y el valor m corresponde a la pendiente de la recta tangente en dicho valor x.

Ejercicio. En cada uno de los otros puntos marcados sobre la gráfica traza un pedazo de la recta tangente y calcula de manera aproximada su pendiente. Observa que dichas pendientes son iguales a algunas ya indicadas en la tabla.

Completa la tabla con la pendiente m de la recta tangente de la función seno en cada uno de los valores de x indicados y traza la gráfica con los valores de la tabla. ¿A qué función se asemeja la curva trazada?

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$
m	1	0.71	0	-0.71	-1							



Traza la gráfica de la función derivada de la función $f(x) = \mathrm{sen}(x)$

Las funciones trigonométricas se les nombra también circulares porque vuelven a tomar los mismos valores, en intervalos regulares de tiempo, algunas situaciones se pueden modelar con estas funciones, por ejemplo, los movimientos armónicos simples, cuerpos fijos a un resorte, el movimiento de un péndulo, un cuerpo en un movimiento circular uniforme.

El estudio de estos movimientos nos conduce a modelar situaciones problema que se nos presentan en lo cotidiano, por ejemplo: los sismos, la luz, el sonido, los tsunamis. Teniendo una aproximación de una función que reproduzca el fenómeno, podemos tener control, o bien, podemos prevenir desastres.

Identidades trigonométricas

<table>
<tr><th colspan="6">Identidades recíprocas</th></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathbf{1}) \ sen\theta = \frac{1}{csc\theta}$</td><td colspan="2">$\mathbf{2}) \ cos\theta = \frac{1}{sec\theta}$</td><td colspan="2">$\mathbf{3}) \ tan\theta = \frac{1}{cot\theta}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathbf{4}) \ cot\theta = \frac{1}{tan\theta}$</td><td colspan="2">$\mathbf{5}) \ sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$</td><td colspan="2">$\mathbf{6}) \ csc\theta = \frac{1}{sen\theta}$</td></tr>
<tr><th colspan="6">Identidades de cociente</th></tr>
<tr><td colspan="3">$\mathbf{7}) \ tan\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}$</td><td colspan="3">$\mathbf{8}) \ cot\theta = \frac{cos\theta}{sen\theta}$</td></tr>
<tr><th colspan="6">Identidades pitagóricas</th></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathbf{9}) \ sen^2\theta + cos^2 \theta = 1$</td><td colspan="2">$\mathbf{10}) \ sec^2\theta - tan^2 \theta = 1$</td><td colspan="2">$\mathbf{11}) \ csc^2\theta - cot^2 \theta = 1$</td></tr>
<tr><th colspan="6">Identidades de paridad</th></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathbf{12}) \ sen(-\theta) = -sen\theta$</td><td colspan="2">$\mathbf{13}) \ cos(-\theta) = cos\theta$</td><td colspan="2">$\mathbf{14}) \ tan(-\theta) = -tan\theta$</td></tr>
</table>

Identidades para disminuir el grado	
$\mathbf{15})\ sen^2\theta = \frac{1}{2}(1 - cos2\theta)$	$\mathbf{16})\ \cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + cos2\theta)$
Identidades de ángulo doble	
$\mathbf{17})\ sen2\theta = 2sen\theta cos\theta$	$\mathbf{18})\ cos2\theta = \cos^2\theta - sen^2\theta$
Identidades de suma y resta de ángulos	
$\mathbf{19})\ sen(\alpha + \beta) = sen\alpha cos\beta + sen\beta cos\alpha$	$\mathbf{20})\ sen(\alpha - \beta) = sen\alpha cos\beta - sen\beta cos\alpha$
$\mathbf{21})\ cos(\alpha + \beta) = cos\alpha cos\beta - sen\alpha sen\beta$	$\mathbf{22})\ cos(\alpha - \beta) = cos\alpha cos\beta + sen\alpha sen\beta$

Principales Identidades trigonométricas

Recordemos que existen diferentes notaciones para la derivada de una función. Utilizaremos indistintamente cualquiera de las notaciones para indicar la derivada de una función.

$$f'(x) \qquad\qquad D_x\, f(x) \qquad\qquad \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\, f(x)$$

Con base en la definición formal de derivada, se mostrará que la derivada de la función

$$f(x) = \cos(x)$$

es la función $f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$. Sabiendo que: $\cos(x+h) = \cos(x)\cos(h) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(h)$ y aplicando la definición de derivada: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se tiene:

$$f(x) = cos(x)$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{cos(x+h) - cos(x)}{h}$$ Definición de derivada

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(cos(x)\,cos(h) - sen\,(x)\ \ sen\,(h)) - cos(x)}{h}$$ Identidad 21

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{cos(x)\,cos(h) - \cos(x) - sen\,(x)\ \ sen\,(h)}{h}$$ Reacomodando

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{cos(x)\,(cos(h) - 1) - sen\,(x)\ \ sen\,(h)}{h}$$ Factorizando

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{cos(x)\,(cos(h) - 1)}{h} - \frac{sen\,(x)\ \ sen\,(h)}{h}\right)$$ Separamos la fracción

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\,(cos(h) - 1)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{sen\,(x)\ \ sen\,(h)}{h}$$ Propiedades de límites

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} cos(x) \lim_{h \to 0} \frac{(cos(h) - 1)}{h} - \lim_{h \to 0} sen\ (x) \lim_{h \to 0} \frac{sen\ (h)}{h}$$ Propiedades de límites

$$f'(x) = cos(x) \lim_{h \to 0} \frac{(cos(h) - 1)}{h} - sen\ (x) \lim_{h \to 0} \frac{sen\ (h)}{h}$$ $cos(x)$ y $sen(x)$ no dependen de h

$$f'(x) = (cos(x))(0) - (sen\ (x))(1)$$ $\lim_{h \to 0} \frac{(cos(h) - 1)}{h} = 0$

$\lim_{h \to 0} \frac{sen\ (h)}{h} = 1$

$$f'(x) = -sen(x)$$

De forma análoga, se prueba que la derivada de la función $f(x) = sen\ (x)$ es igual a la función $f'(x) = cos(x)$

Ejercicios:

a) Sigue el procedimiento anterior y prueba que $D_x\ cos\ (u) = -sen(u)\ D_x(u)$
b) Sigue un procedimiento similar y prueba que $D_x\ sen\ (x) = cos(x)$
c) Sigue el mismo procedimiento y prueba que $D_x\ sen\ (u) = cos(u)\ D_x(u)$. En este caso u es una función que depende de x.

A continuación, se muestra cómo obtener la derivada de la función tangente a partir de las derivadas de las funciones seno y coseno. Las derivadas de las otras funciones trigonométricas se obtienen de manera similar.

Ejemplo: Probar que $(tan(x))' = sec^2(x)$

$$f(x) = tan(x)$$

$$f(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$$ Identidad 7

$$f'(x) = \frac{cos(x)\ \left(sen\ (x)\right)' - sen\ (x)\ (cos(x))'}{(cos(x))^2}$$ Derivada de un cociente

$$f'(x) = \frac{cos(x)\ \left(cos\ (x)\right) - sen(x)\ (-sen(x))}{(cos\ x)^2}$$ Realizando las derivadas

$$f'(x) = \frac{cos^2(x) + sen^2\ (x)}{(cos(x))^2}$$ Realizando los productos

$$f'(x) = \frac{1}{(cos(x))^2}$$ Identidad 9

$$f'(x) = \left(\frac{1}{cos(x)}\right)^2$$ Propiedades de los exponentes

$$f'(x) = (sec(x))^2$$ Identidad 5

$$(\tan(x))' = sec^2(x)$$

Ejercicios: Prueba las siguientes derivadas, utilizando las identidades trigonométricas.

a) $(cot(x))' = -\,csc^2(x)$

b) $(sec(x))' = sec(x)\,tan(x)$

c) $(csc(x))' = -csc(x)\,cot(x)$

Derivadas de las Funciones Trigonométricas

Las siguientes son fórmulas que se necesitan para determinar la derivada de funciones trigonométricas cuyo argumento u es una función que depende de la variable x.

1) $\frac{d}{dx}sen(u) = cos(u)\frac{du}{dx}$

2) $\frac{d}{dx}cos(u) = -sen(u)\frac{du}{dx}$

3) $\frac{d}{dx}tan(u) = sec^2(u)\frac{du}{dx}$

4) $\frac{d}{dx}cot(u) = -csc^2(u)\frac{du}{dx}$

5) $\frac{d}{dx}sec(u) = sec(x)\,tan(x)\frac{du}{dx}$

6) $\frac{d}{dx}csc(u) = -csc(x)\,cot(x)\frac{du}{dx}$

A continuación, se calcula la derivada de diversas funciones. Para llegar a la solución se usan las fórmulas de derivación de una constante, de una suma, de un producto o de un cociente, así como la regla de la cadena.

Ejemplos:

a) Calcula la derivada de la función $y(x) = sen^2(x) + cos^2(x)$

$y(x) = sen^2(x) + cos^2(x)$

$y(x) = 1$ Identidad 9

$\frac{dy}{dx} = 0$ Derivada de una constante

b) Determina la derivada de la función $f(x9 = 3sec\,(3x^2 + 3x - 1)$

$f(x) = 3\,sec(3x^2 + 3x - 1)$

$D_x f\, = 3\,sec(3x^2 + 3x - 1)\,tan(3x^2 + 3x - 1) \cdot (6x + 3)$ Regla de la cadena

$D_x f\, = 3(6x + 3)\,sec(3x^2 + 3x - 1) \cdot tan(3x^2 + 3x - 1)$ Reacomodando

$D_x f\, = 9(2x + 1)\,sec(3x^2 + 3x - 1) \cdot tan(3x^2 + 3x - 1)$ Factorizando

c) Calcula la derivada de la función $g(x) = x^3\sqrt{sen(x)}$

$$\left(x^3\sqrt{sen(x)}\right)' = x^3\left(\sqrt{sen(x)}\right)' + \sqrt{sen(x)}\,(x^3)'$$ Derivada de un producto

$$\left(x^3\sqrt{sen(x)}\right)' = x^3\frac{cos(x)}{2\sqrt{sen(x)}} + 3x^2\sqrt{sen(x)}$$ Realizando las derivadas

$$\left(x^3\sqrt{sen(x)}\right)' = \frac{x^3cos(x) + 6x^2sen(x)}{2\sqrt{sen(x)}}$$ Efectuando la suma de fracciones

$$\left(x^3\sqrt{sen(x)}\right)' = \frac{x^2[x\,cos(x) + 6\,sen(x)]}{2\sqrt{sen(x)}}$$ Factorizando

Ejercicios: Usa las distintas fórmulas de derivación para encontrar la derivada de cada una de las siguientes funciones trigonométricas.

a) $y = x^2sen(x)$

b) $g(x) = csc\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)$

c) $k(x) = cot^4\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

d) $y = \frac{sen(3x)}{6\,cos(4x)}$

Soluciones:

$a)\ y' = x\,[2\,sen(x) + x\,cos(x)]$

$b)\ \frac{dg}{dx} = -\frac{4}{(1+2x)^2}csc\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)\cdot cot\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)$

$c)\ D_x\,k = \frac{16x}{(1+x^2)^2}\cdot cot^3\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\cdot csc^2\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

$d)\ \frac{dy}{dx} = \frac{3\,cos(3x)\cdot cos(4x) + 4\,sen(4x)\ \cdot sen(3x)}{6\,cos^2(4x)}$

La Función Logarítmica

Sea $a > 0$, $a \neq 1$, si $u\ y\ v$ son funciones de x, entonces el exponente v tal que $a^v = u$ es llamado el logaritmo de u con base a y se escribe $log_a\,u$. En forma abreviada:

$$v = log_a(u) \quad \text{sí y solo sí} \quad a^v = u$$

Si la base es el número 10, entonces se conoce como logaritmo base 10 y se escribe

$$log_{10}(u) = log(u)$$

Definición. Sea $a > 0$ y $a \neq 1$, la función $f(x) = log_a(u)$, para cualquier función u en términos de x, se conoce como la función logarítmica f con base a.

Si la base es el número e, el logaritmo se conoce como **logaritmo natural** y se escribe $log_e(u) = ln(u)$.

Las funciones logarítmicas son crecientes si $a > 1$ y son decrecientes para $0 < a < 1$; tienen al eje Y como asíntota vertical y son funciones continuas.

Propiedades de la función logarítmica

En todos los casos $a, b\ y\ c$ son números reales positivos, u y w son funciones de x, además $a \neq 1$ y $b \neq 1$	
$\mathbf{1})\ log_a 1 = 0$	$\mathbf{2})\ log_a a^u = u$
$\mathbf{3})\ log_a(uw) = log_a u + log_a w$	$\mathbf{4})\ log_a \left(\frac{u}{v}\right) = log_a u - log_a w$
$\mathbf{5})\ log_a(u^n) = n\ log_a u$	$\mathbf{6})\ log_a u = log_a b\ log_b u$
$\mathbf{7})\ ln(e^u) = u$	$\mathbf{8})e^{(ln\, u)} = u$

Derivadas de las Funciones Logarítmicas

Las siguientes son fórmulas que se necesitan para determinar la derivada de funciones logarítmicas cuyo argumento u es una función que depende de la variable x.

7) $\frac{d}{dx} log_a(u) = \frac{1}{ln\, a} \frac{du}{u}$

8) $\frac{d}{dx} ln\ (u) = \frac{du}{u}$

A continuación, se calcula la derivada de diversas funciones. Para llegar a la solución se usan las fórmulas de derivación de una constante, de una suma, de un producto o de un cociente, así como la regla de la cadena.

Ejemplos:

a) Calcula la derivada de la función $y(x) = ln\ (8x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}\ 8x}{8x}$ Derivada de logaritmo natural

$\frac{dy}{dx} = \frac{8}{8x}$ Realizando la derivada

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ Simplificando

b) Calcula la derivada de la función $u(x) = log_3\ |4x^2 - 1|$

$u(x) = log_3\ |4x^2 - 1|$ Argumento positivo

$D_x u = \frac{1}{ln\ 3} . \frac{D_x(4x^2 - 1)}{4x^2 - 1}$ Derivada de logaritmo base 3

$D_x u = \frac{1}{ln\ 3} . \frac{8x}{4x^2 - 1}$ Realizando la derivada

c) Determina la derivada de la función $f(x) = log\ \sqrt{3x^5 - 6x^3}$

$f(x) = log\ \sqrt{3x^5 - 6x^3} = log(3x^5 - 6x^3)^{\frac{1}{2}}$ Leyes de los exponentes

$f(x) = \frac{1}{2} log(3x^5 - 6x^3)$ Propiedades del logaritmo

$f'(x) = \frac{1}{2} . \frac{1}{ln\ 10} . \frac{(3x^5 - 6x^3)'}{3x^5 - 6x^3}$ Derivada del logaritmo base 10

$f'(x) = \frac{1}{2\ ln\ 10} . \frac{15x^4 - 18x^2}{3x^5 - 6x^3}$ Realizando la derivada

$f'(x) = \frac{1}{(2\ ln\ 10)} . \frac{3x^2(5x^2 - 6)}{3x^3(x^2 - 2)}$ Factorizando

$f'(x) = \frac{(5x^2 - 6)}{(2\ ln\ 10)x(x^2 - 2)}$ Simplificando

Ejercicios. Realiza las siguientes derivadas, simplificando al máximo

$a)\ y(x) = ln\ |5x|$

$b)\ f(x) = log_5 \sqrt{5x + 2}$

$c)\ g(x) = 8 \ln\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)$

Soluciones:

$a)\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

$b)\ D_x u = \frac{5}{2\,(ln\,5)(5x+2)}$

$c)\ \ g'(x) = \frac{8(1-x^2)}{x(x^2+1)}$

Funciones exponenciales

Definición. Una función exponencial f está dada por $f(u) = a^u$, donde u es una función de x, con $a > 0\ y\ a \neq 1$. El número a es llamado la base.

Propiedades de la función exponencial

En todos los casos a, b son números reales positivos, u y w son funciones de x, además $a \neq 1$ y $b \neq 1$	
1) $a^0 = 1$	**2)** $a^u a^v = a^{u+v}$
3) $\frac{a^u}{a^v} = a^{u-v}$	**4)** $(a^u)^v = a^{uv}$
5) $a^{-u} = \frac{1}{a^u}$	**6)** $(ab)^u = a^u b^u$
7) $\left(\frac{a}{b}\right)^u = \frac{a^u}{b^u}$	**8)** $\left(\frac{a}{b}\right)^{-u} = \left(\frac{b}{a}\right)^u = \frac{b^u}{a^u}$
9) $a^{\frac{u}{v}} = \sqrt[v]{a^u}$	

Derivadas de las Funciones Exponenciales

Las derivadas de las funciones exponenciales se pueden encontrar utilizando las fórmulas para las derivadas de las funciones de logaritmo natural. Por ejemplo, para encontrar la derivada de la función $y = e^x$

$y = e^x$	
$ln\,y = ln\,(e^x)$	Tomando logaritmo natural a ambos lados
$ln\,y = x\,ln\,(e)$	Propiedades de los logaritmos
$ln\,y = x$	$ln(e) = 1$
$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = 1$	Derivando a ambos lados

$\frac{dy}{dx} = y$ Dado que $y = e^x$

$\frac{d}{dx} e^x = e^x$ Sustituyendo

Las siguientes son fórmulas que se necesitan para determinar la derivada de funciones exponenciales cuyo argumento u es una función que depende de la variable x.

9) $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

10) $\frac{d}{dx} e^u = \frac{du}{dx} e^u$

11) $\frac{d}{dx} a^u = ln(a) \frac{du}{dx} a^u$

A continuación, se calcula la derivada de diversas funciones exponenciales. Para llegar a la solución se usan las fórmulas de derivación de una constante, de una suma, de un producto o de un cociente, así como la regla de la cadena.

Ejemplos:

a) Derivar la función $m(x) = e^{2x}$

$m(x) = e^{2x}$

$m'(x) = e^{2x}(2x)'$ Derivada de la función exponencial

$m'(x) = 2\, e^{2x}$

b) Derivar la función $y(x) = 3^x$

$y(x) = 3^x$

$D_x y = ln(3) * 1 * 3^x$ Derivada de la función exponencial con base 3

$D_x y = ln(3) * 3^x$ Simplificando

c) Derivar la función $f(r) = 2r^3 e^{\frac{2}{3}r^5}$

$f(r) = 2r^3 e^{\frac{2}{3}r^5}$

$\frac{df}{dx} = e^{\frac{2}{3}r^5} \frac{d}{dx}(2r^3) + 2r^3 \frac{d}{dx}\left(e^{\frac{2}{3}r^5}\right)$ Derivada de un producto

$\frac{df}{dx} = e^{\frac{2}{3}r^5}(6r^2) + 2r^3\left(\frac{10}{3}r^4\right)\left(e^{\frac{2}{3}r^5}\right)$ Realizando las derivadas

$$\frac{df}{dx} = 6r^2 \cdot e^{\frac{2}{3}r^5} + \frac{20}{3}r^7 \cdot e^{\frac{2}{3}r^5}$$ Reacomodando y simplificando

$$\frac{df}{dx} = \frac{2}{3}r^2(9 + 10\,r^5) \cdot e^{\frac{2}{3}r^5}$$ Factorizando

d) Encontrar la ecuación de la recta tangente de la función $v(r) = 3\,ln(2r)^2$ en $r = \frac{e}{2}$

$v(r) = 6\,ln(2r)$ Se simplifica, propiedades de logaritmo

$v'(r) = 6 \cdot \frac{2}{2r}$ Primero se calcula la pendiente de la recta tangente derivando la función

$v'(r) = \frac{6}{r}$ Simplificando

$v'\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{6}{\frac{e}{2}}$ Se sustituye el valor de r en donde se pide la recta tangente

$v'\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{12}{e} = m$ Es el valor de la pendiente

$v\left(\frac{e}{2}\right) = 6\,ln\left(2\frac{e}{2}\right)$ Se obtiene el valor de la ordenada en el valor que se pide

$v\left(\frac{e}{2}\right) = 6\,ln(e)$ Se simplifica

$v\left(\frac{e}{2}\right) = 6$ $ln(e) = 1$

$y = mx + b$ Ecuación de la recta

$6 = \frac{12}{e} \cdot \frac{e}{2} + b$ Se sustituyen los valores de m y del punto de tangencia $\left(\frac{e}{2}, 6\right)$ en la ecuación de la recta

$b = 0$ Despejando

$v = \frac{12}{e}\,r$ Es la ecuación de la recta tangente

Ejercicios: Determina la derivada de las siguientes funciones, simplificando al máximo tus resultados

$a)\ y(x) = -6e^{2x}$

$b)\ i(x) = \frac{e^{3x^2+1}}{e^{2x}}$

$c)\ h(x) = e^{e^x}$

Soluciones:

a) $\frac{dy}{dx} = -12e^{2x}$

b) $D_x\, i = 2(3x-1)e^{3x^2-2x+1}$

c) $h'(x) = e^x e^{e^x}$

Miscelánea de ejercicios de funciones trascendentes

Ejemplos:

a) Calcula la derivada de la siguiente función.

$$g(t) = \cos(2t) \cdot e^{(\sqrt{t})}$$

$$g'(t) = cos(2t) \cdot \left(e^{(\sqrt{t})}\right)' + (cos(2t))' * e^{(\sqrt{t})} \qquad \text{Derivada de un producto}$$

$$g'(t) = (cos(2t))\left(e^{(\sqrt{t})} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}\right) + \left(e^{(\sqrt{t})}\right)(-sen(2t) \cdot 2) \qquad \text{Realizando las derivadas}$$

$$g'(t) = e^{(\sqrt{t})}\left(\frac{cos(2t)}{2\sqrt{t}} - 2sen(2t)\right) \qquad \text{Factorizando}$$

b) Determina la derivada de la función $f(x)$.

$$f(x) = ln\sqrt{\frac{sen(x)}{cos\ (\pi x)}} = ln\left(\frac{sen\ (x)}{cos(\pi x)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{sen(x)}{cos(\pi x)}\right)^{-\frac{1}{2}} \ \frac{d}{dx}\ \frac{sen(x)}{cos(\pi x)}}{\sqrt{\frac{sen(x)}{\cos(\pi x)}}} \qquad \text{Regla de la cadena}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{sen(x)}{cos(\pi x)}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{cos(\pi x)\, cos(x) - sen(x) \cdot -sen(\pi x) * \pi}{[cos\ (\pi x)]^2}\right]}{\sqrt{\frac{sen(x)}{cos(\pi x)}}} \qquad \text{Realizando la derivada}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\frac{1}{2}\left[\frac{cos(\pi x)\, cos(x) - sen(x) \cdot -sen(\pi x) * \pi}{[cos\ (\pi x)]^2}\right]}{\left(\frac{sen(x)}{cos(\pi x)}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{sen(x)}{cos(\pi x)}}} \qquad \text{Leyes de los exponentes}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\frac{1}{2}\left[\frac{cos(\pi x)\, cos(x) + \pi sen(x) sen(\pi x)}{cos^2(\pi x)}\right]}{\left(\sqrt{\frac{senx}{cos(\pi x)}}\right)^2} \qquad \text{Leyes de los exponentes}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\frac{cos(\pi x)\,cos(x) + \pi sen(x) sen(\pi x)}{2cos^2(\pi x)}}{\frac{sen(x)}{cos(\pi x)}}$$ Realizando operaciones

$$\frac{df}{dx} = \frac{cos(\pi x)\,[cos(\pi x) \cdot cos(x) + \pi sen(x) \cdot sen(\pi x)]}{2cos^2(\pi x)\,sen(x)}$$ Producto de extremos entre producto de medios

$$\frac{df}{dx} = \frac{cos(\pi x) \cdot \cos(x) + \pi sen(x) \cdot sen(\pi x)}{2\,cos(\pi x) \cdot sen(x)}$$ Simplificando

c) Calcula la derivada de la siguiente función. Aquí es necesario aplicar la regla de la cadena varias veces.

$$h(x) = 4^{[csc(e^{(2x)})]}$$

$$D_x h = ln4 \cdot 4^{[csc(e^{(2x)})]}\, D_x\left[csc\left(e^{(2x)}\right)\right]$$ Derivada de la función exponencial y regla de la cadena

$$D_x h = ln4 \cdot 4^{[csc(e^{(2x)})]} \cdot -csc\left(e^{(2x)}\right) \cdot cot\left(e^{(2x)}\right) \cdot e^{(2x)} \cdot 2$$ Realizando la derivada con la regla de la cadena

$$D_x h = -2ln4 \cdot 4^{[\csc(e^{(2x)})]}\, csc\left(e^{(2x)}\right) cot\left(e^{(2x)}\right) \cdot e^{(2x)}$$ Reacomodando términos

Ejercicios. Deriva las siguientes funciones y simplifica al máximo

a) $f(x) = sen\left\{2^{[cos\,(3x)]}\right\}$

b) $g(x) = \frac{e^{(1-x)}}{x^2}$

c) $h(w) = csc\ \left(\sqrt[3]{sen(w)}\right)$

$d)\ y = cot^2(\pi x)$

e) $f(x) = tan\left(\frac{\sec(x)}{3}\right)^2$

f) $u(x) = \left(cos^3(x)\right)\left(cos(x^3)\right)$

$g)\ h(x) = \left(3 - xsec(\sqrt{x})\right)^3$

$h)\ f(x) = tan\left(tan(x)\right) tan\ (x)$

$i)\ g(x) = sen(sec^2(\pi x))$

$j)\ w(x) = \frac{csc^6(1-x)}{\sqrt[3]{cos(x)}}$

$k)\ y = ln^{10}[cos(x) * cos(2x)]$

$l)\ r(t) = ln\left(sen^5\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{10}$

Soluciones:

$a)\ f'^{(x)} = -3ln2 \cdot cos\left(2^{[cos(3x)]}\right) \cdot 2^{[cos(3x)]} \cdot sen(3x)$

$b)\ \ g'(x) = \frac{e^{(1-x)}(-x-2)}{x^3}$

$c)\ h'(w) = -\dfrac{csc\left(\sqrt[3]{sen(w)}\right) cot\left(\sqrt[3]{sen(w)}\right) cos(w)}{3\big(sen(w)\big)^{2/3}}$

$d)\ y' = -2\pi\, cot(\pi x)\, csc^2(\pi x)$

$e)\ f'(x) = \frac{2}{9} \cdot sec^2\left(\frac{sec(x)}{3}\right)^2 \cdot sec^2(x) \cdot tan(x)$

$f)\ u'(x) = -3\, cos^2(x)\, [x^2 cos(x) \cdot sen(x^3) + 3cos(x^3) sen(x)]$

$g)\ h'(x) = -3\left(3 - xsec(\sqrt{x})\right)^2 sec(\sqrt{x})\left(\dfrac{\sqrt{x}\, tan(\sqrt{x})}{2} + 1\right)$

$h)\ f'(x) = \sec^2(x)\{\tan(tan(x)) + tan(x)\}$

$i)\ g'(x) = 2\pi cos\, (sec^2(\pi x)) \cdot sec^2(\pi x) * tan(\pi x)$

$j)\ w'(x) = \dfrac{\frac{1}{3} csc^6(1-x)\left[18\sqrt[3]{cos(x)} \cdot cot(1-x) + cos^{-2/3}(x) \cdot sen(x)\right]}{cos^{2/3}(x)}$

$k)\ y' = \dfrac{10 \ln^9(cos(x) \cdot cos(2x))[-2cos(x) \cdot sen(2x) - cos(2x) \cdot sen(x)]}{cos(x) \cdot cos(2x)}$

$l)\ r'(t) = \dfrac{-50}{x^2} cot\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Aplicaciones de las funciones trascendentes

Ejemplos

1) Para construir un modelo matemático para el tipo más simple de crecimiento, supondremos que la razón de cambio es proporcional a la población misma, esto es, si P es la población en el tiempo t, entonces $\frac{dP}{dt} = kP$, donde k es una constante, si $k > 0$, hay crecimiento; si $k < 0$ hay decrecimiento. ¿Qué función satisface dicha ecuación?
   Solución: La función que satisface esa condición es la función exponencial $P(t) = P_0\, e^{kt}$, donde P_0 es una constante, si hacemos $t = 0$ en la expresión anterior, se observa que P_0 es la población inicial.
2) La respuesta y a una dosis x de un medicamento, está dada por $y = m\, log\, x + b$. La respuesta es difícil de medir con un número, ya que hay varios factores que intervienen, el paciente puede transpirar más, tener un incremento en la temperatura o debilitarse.
   a) encuentra la razón de cambio $\frac{dy}{dx}$ b) interpreta el significado de $\frac{dy}{dx}$
   Solución:
   a) $\frac{dy}{dx} = \frac{m}{ln\, 10}\, \frac{1}{x}$
   b) $\frac{dy}{dx}$ representa los cambios en la respuesta al medicamento.

3) La presión sanguínea de una persona está dada por $P(t) = 95 + 17sen(\pi t)$, donde P está dada en milímetros de mercurio y t en segundos.
¿Cuál es el rango de presión sanguínea que tiene esta persona?
Solución: Con la expresión de la función se observa que 95 y 17 son constantes, por lo que la variación de la función se debe a $sen(\pi t)$, sabiendo los valores mínimos y máximos de la función $sen(\pi t)$, se tiene que para $t = 0$, se tiene un valor mínimo y para $t = \frac{1}{2}$ se tiene un valor máximo, sustituyendo estos valores en la función $P(t) = 95 + 17sen(\pi t)$.

$P(0) = 95 + 17sen(\pi \cdot 0)$	Para $t = 0$ s
$P(0) = 95 + 17sen(0)$	Multiplicando
$P(0) = 95\ mm\ Hg$	$sen(0) = 0$

$P\left(\frac{1}{2}\right) = 95 + 17sen\left(\pi \cdot \frac{1}{2}\right)$	Para $t = \frac{1}{2}$ s
$P\left(\frac{1}{2}\right) = 95 + 17sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$	Multiplicando
$P\left(\frac{1}{2}\right) = 95 + 17$	$sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
$P\left(\frac{1}{2}\right) = 112\ mm\ Hg$	

Por lo tanto, el intervalo de presión del paciente es [95,112].

4) El 17 de octubre de 1989 hubo un sismo en San Francisco durante la Serie Mundial de Base ball, tuvo una intensidad de $I = 10^{6.9}I_0$, ¿cuál fue su magnitud en la escala de Richter?
Cuando un sismo es 100 veces más intenso que otro, su magnitud en la escala de Richter es 2 veces más alto. Así, si un sismo cuya magnitud es 7 en la escala de Richter es 10 veces más intenso que un sismo cuya magnitud es 6.
Solución: Dado que la magnitud R en la escala de Richter de un sismo de Intensidad I, está definida como: $R = log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ donde I_0 es la mínima intensidad utilizada como comparación, partiendo de la relación que se proporciona:

$I = 10^{6.9}I_0$	
$\frac{I}{I_0} = 10^{6.9}$	Dividiendo la ecuación por I_0
$log\left(\frac{I}{I_0}\right) = log(10^{6.9})$	Aplicando logaritmo base 10 a ambos lados
$log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 6.9$	$log(10^u) = u$
$R = log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 6.9$	Magnitud de la intensidad

Por lo que el sismo fue de magnitud 6.9 en la escala de Richter.

Ejercicios:

a) Si un cultivo de 80 bacterias crece a una razón proporcional al tamaño de la población presente, y 2 horas después hay 300 bacterias ¿cuál es la ecuación diferencial que describe esta situación? Considera que B es la cantidad de bacterias y t es el tiempo en horas.

b) Encuentra los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = x\,ln\,x$, traza la gráfica de la función.

c) Encuentra los máximos y mínimos relativos de la función $h(x) = 5\frac{ln\,x}{x},\ x > 0$, traza la gráfica de la función.

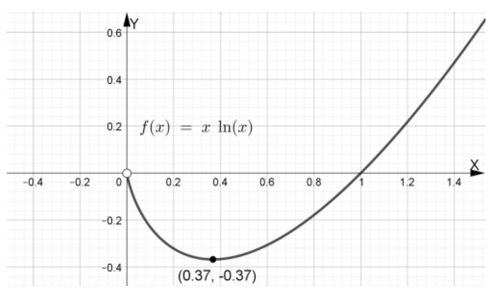
d) Una partícula se mueve a lo largo de una recta de modo que su desplazamiento está determinado por: $s(t) = \frac{3}{1+4\,e^{(-0.5\,t)}}$ donde t es el tiempo medido en segundos y el desplazamiento s en metros, calcula la velocidad y la aceleración de la partícula después de 2 segundos.

e) Encuentra la ecuación de la recta tangente de un objeto que viaja siguiendo el siguiente comportamiento: $s(t) = -3\,sen(2t)$ cuando $t = \pi$ s.

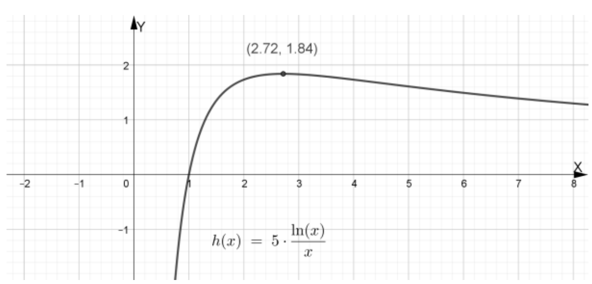
Soluciones:

a) $\frac{dB}{dt} = kB$

b) Mínimo en $x = \left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right) \approx (0.3679, -0.3679)$



c) Máximo en $\left(\frac{1}{e}, e\right) \approx (2.718, 1.84\ )$



d) La velocidad es $0.36\ m/s$ y la aceleración es $0.03447\ m/s^2$.

e) $y = -6t + 6\pi$

Unidad 2. La integral definida

Presentación

El propósito de esta unidad es que comprendas el concepto de integral definida, analizando situaciones dadas en diferentes contextos para construir su significado. Además, deberás relacionar los conceptos de derivada e integral a través del Teorema Fundamental del Cálculo y aplicarlos en diferentes situaciones.

Para lograr lo anterior se muestran ejemplos de aplicación además se proporcionan las fórmulas necesarias para realizar cada uno de los procedimientos.

El área bajo una curva

Para calcular el área bajo una curva se considera $f(x) \geq 0$, debido a que se va a determinará el área mediante aproximaciones y la altura será el valor de la función, esto es, la altura debe tomar valores positivos. Más adelante, con la integral definida, veremos qué sucede cuando la función toma valores negativos.

El área bajo la gráfica de ciertas funciones es fácil de calcular. Por ejemplo, para una función constante solamente debes calcular el área de un rectángulo y para una función lineal se tienen dos opciones: el área de un triángulo o de un trapecio. En las secciones siguientes se verá cómo calcular dichas áreas.

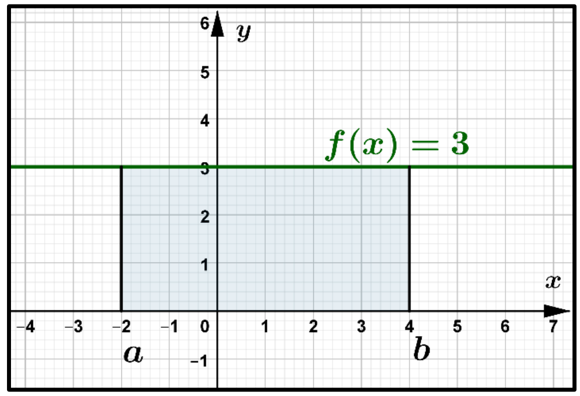
El área bajo la gráfica de una función cuya gráfica no sea una recta es más difícil de calcular, por ejemplo, una función cuadrática o una cúbica. Para estas funciones se usarán las sumas de Riemann con el objetivo de medir dichas áreas.

Área bajo la gráfica de una función constante

El área bajo la gráfica de una función **constante**, es decir, el área entre la función, el eje de las abscisas y las rectas $x = a$, $x = b$ se calcula de la siguiente manera: Se mide la longitud de la base $b - a$ y se multiplica por la altura, en este caso, $f(x)$.

Ejemplo: Determina el área bajo la función constante $f(x) = 3$, el eje de las abscisas y las rectas verticales $x = -2$ y $x = 4$.

Solución:



$$A = (b - a)f(x)$$

$$A = \big(4 - (-2)\big)(3)$$

$$A = 18\, u^2$$

$\therefore$ el área bajo la gráfica es $18\, u^2$

Ejercicios: Determina el área entre la función constante y el eje de las abscisas en el intervalo indicado.

a) $f(x) = 5$, en el intervalo $[0, 6]$

b) $y(x) = \frac{3}{4}$, en el intervalo $[-1, 1]$

c) $g(x) = \pi$, en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$

d) $h(x) = \sqrt{5}$, en el intervalo $\left[\frac{1}{6}, 4\right]$

Soluciones:

a) $A = 30\, u^2$

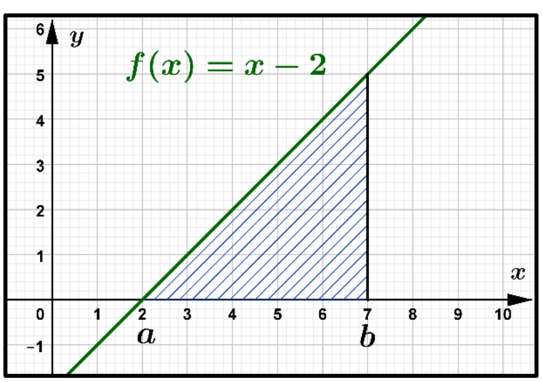
b) $A = \frac{3}{2}\, u^2$

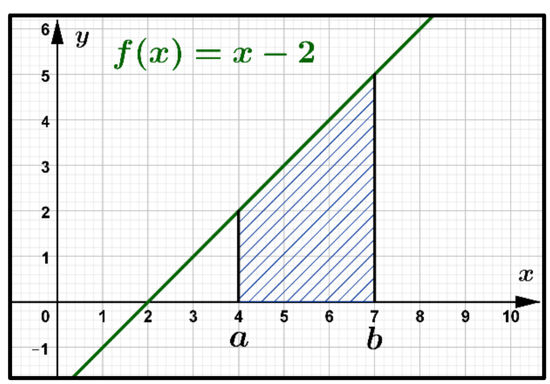
c) $A = \frac{5}{4}\pi\, u^2$

d) $A = \frac{23}{6}\sqrt{5}\, u^2$

Área bajo la gráfica de una función lineal

El área bajo la gráfica de una función **lineal** la podemos calcular mediante el área de un triángulo o de un trapecio, como se muestra en las siguientes figuras. Cabe recordar que de momento solamente estamos tomando en cuenta funciones positivas, es decir, la gráfica de la función se debe localizar por encima del eje de las abscisas.





En el caso de que la función, el eje de las abscisas y el intervalo $[a, b]$ formen un triángulo, el área se determina de la siguiente forma.

$$A = \frac{(b-a)f(b)}{2}$$

La base del triángulo está dada por la expresión $(b-a)$ y la altura por $f(b)$ en el caso de que la función sea creciente. Si la función es decreciente la altura está dada por $f(a)$.

Para el caso en el que el área por calcular sea la de un trapecio se usa la fórmula

$$A = \frac{f(b) + f(a)}{2}(b-a)$$

En este caso se tiene que la base mayor del trapecio es $f(b)$, la base menor $f(a)$ mientras la altura es $(b-a)$. Si la función lineal es decreciente la base mayor está dada por $f(a)$ y la menor por $f(b)$, pero la fórmula para calcular el área no cambia.

Ejercicios: Determina el área entre la función lineal y el eje de las abscisas en el intervalo indicado.

a) $f(x) = \frac{x}{3} + 3$, en el intervalo $[-9, 0]$

b) $f(x) = x + 1$, en el intervalo $[1, 3]$

c) $f(x) = -\frac{x}{2} + 1$, en el intervalo $[-2, 2]$

d) $f(x) = -x + 4$, en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$

Soluciones.

a) $A = \frac{27}{2}\, u^2$

b) $A = 6\, u^2$

c) $A = 4\, u^2$

d) $A = \frac{45}{8} u^2$

Suma de Riemann por la derecha.

Para calcular el área bajo la gráfica de una función cualquiera, es necesario aproximarla por rectángulos, la suma del área de dichos rectángulos será una buena aproximación siempre que la cantidad de rectángulos sea cada vez mayor. Como se vio en los casos de una función constante o lineal es fácil determinar el área, pues se conocen las fórmulas para calcular el área de figuras planas sencillas.

Para aproximar el área mediante rectángulos es necesario conocer las propiedades de una suma con la notación sigma, que se muestra a continuación.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Por ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{7} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

Propiedades de la suma

$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$	
$\sum_{i=1}^{n} k = kn$	Con k una constante
$\sum_{i=1}^{n}(k \cdot a_i) = k \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$	Con k una constante

Suma de los primeros n naturales, cuadrados y cubos.

Para realizar la suma de Riemann también es necesario conocer las siguientes fórmulas para sumas, las cuales servirán para simplificar los resultados que se obtengan.

$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$	Suma de los primeros n naturales.
$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	Suma de los cuadrados de los n primeros números naturales.
$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$	Suma de los cubos de los n primeros números naturales.

A continuación, se presentan dos ejemplos del área bajo la curva mediante sumas de Riemann.

Ejemplo: Calcular el área bajo la gráfica usando la suma de Riemann I_d por la derecha de la función $f(x) = 2x$ en el intervalo $[1, 4]$.

Solución: Primero calculamos la norma de la partición y el valor x_i. En este caso $[a, b] = [1, 4]$, esto es, $a = 1$, $b = 4$ y

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}, \qquad x_i = a + i\Delta x = 1 + i\Delta x = 1 + \frac{3i}{n}$$

La suma de Riemann se calcula de la siguiente manera.

$$I_d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$I_d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(1 + \frac{3i}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right)$$ Se sustituye x_i y Δx

$$I_d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[2\left(1+\frac{3i}{n}\right)\right]\left(\frac{3}{n}\right)$$

Se aplica la función $f(x) = 2x$ en

$$x_i = 1 + \frac{3i}{n}$$

$$I_d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[2+\frac{6i}{n}\right]\left(\frac{3}{n}\right)$$

Se simplifica la operación

$$2\left(1+\frac{3i}{n}\right)$$

$$I_d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{6}{n}+\frac{18i}{n^2}\right)$$

Se realiza la operación

$$\left[2+\frac{6i}{n}\right]\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$I_d = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{6}{n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{18i}{n^2}\right]$$

Se separa la suma aplicando la propiedad

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$I_d = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} 6+\frac{18}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n} i\right]$$

Se sacan los escalares aplicando las propiedades

$$\sum_{i=1}^{n} ka = k\sum_{i=1}^{n} a\,, \qquad \sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$I_d = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n}\cdot 6n+\frac{18}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

Se usan las siguientes igualdades

$$\sum_{i=1}^{n} k = kn, \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$I_d = \lim_{n\to\infty} \left[6+\frac{9(n+1)}{n}\right]$$

Se realizan las operaciones y se simplifica

$$I_d = \lim_{n\to\infty} \left[15+\frac{1}{n}\right]$$

Se suman términos semejantes

$$I_d = 15$$

Se calcula el límite para obtener el valor del área.

Por lo que podemos concluir que el área entre la gráfica de la función $f(x) = 2x$ y el eje de las abscisas en el intervalo $[1, 4]$ es $A = 15\ u^2$.

A continuación, se calculará el área entre la gráfica de la función cuadrática, ahora no tenemos una fórmula para calcular el área como en el caso de las funciones constantes o lineales, pues la gráfica de la función tiene curvatura.

Ejemplo: Calcular el área bajo la gráfica usando la suma de Riemann I_d por la derecha de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

Solución: Primero calculamos la norma de la partición y el valor x_i. En este caso $[a, b] = [0, 1\ ]$, esto es, $a = 0$ y $b = 1$.

$$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}, \qquad x_i = 0 + i\Delta x = \frac{i}{n}$$

La suma de Riemann se calcula de la siguiente manera.

$$I_d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$I_d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

Se sustituye x_i y Δx

$$I_d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{i}{n}\right)^2\right]\left(\frac{1}{n}\right)$$

Se aplica la función $f(x) = x^2$ en

$$x_i = \frac{i}{n}$$

$$I_d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{i^2}{n^2}\right]\left(\frac{1}{n}\right)$$

Se simplifica la operación

$$\left(\frac{i}{n}\right)^2$$

$$I_d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i^2}{n^3}\right)$$

Se realiza la operación

$$\left[\frac{i^2}{n^2}\right]\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$I_d = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2\right]$$

Se saca el escalar aplicando la propiedad

$$\sum_{i=1}^{n} k a_i = k \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$I_d = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

Se usan las siguientes igualdades

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$I_d = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right]$$

Se simplifica

$$I_d = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2n^2}{6n^2} + \frac{3n}{6n^2} + \frac{1}{6n^2}\right]$$

Se realiza la multiplicación y se separa la fracción.

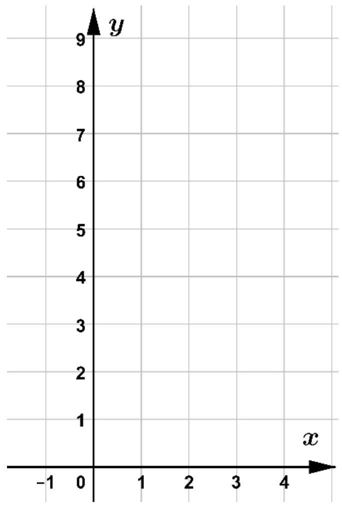
$$I_d = \frac{1}{3}$$

Se calcula el límite para obtener el valor del área.

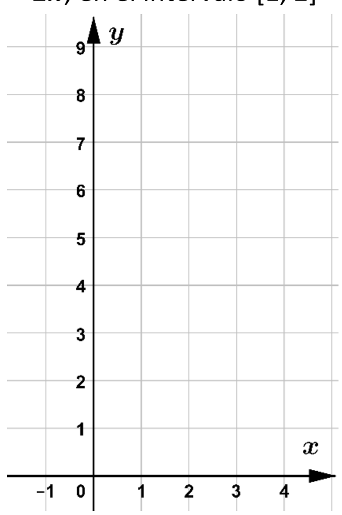
Por lo que podemos concluir que el área entre la gráfica de la función $f(x) = x^2$ y el eje de las abscisas en el intervalo $[0, 1]$ es $A = \frac{1}{3}\, u^2$.

Ejercicios. Determina el valor del área bajo la curva de cada una de las siguientes funciones en el intervalo indicado mediante sumas de Riemann, revisa los ejemplos desarrollados anteriormente. Por separado traza la gráfica de las funciones y sombrea el área calculada.

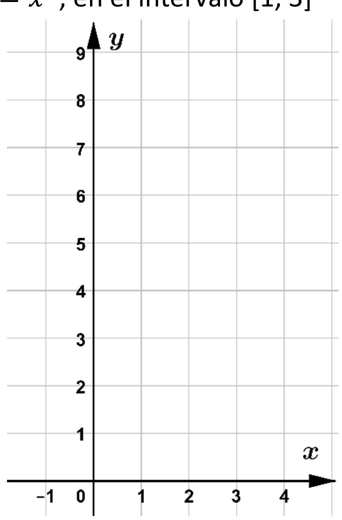
a) $f(x) = 3x$, en el intervalo $[0, 3]$



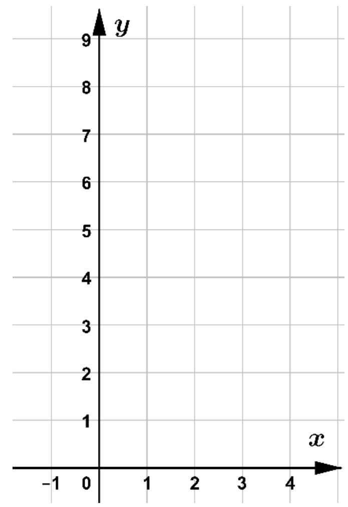
b) $f(x) = 2x$, en el intervalo [1, 2]



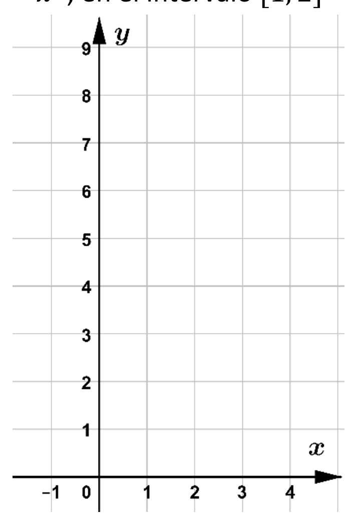
c) $f(x) = x^2$, en el intervalo $[1, 3]$



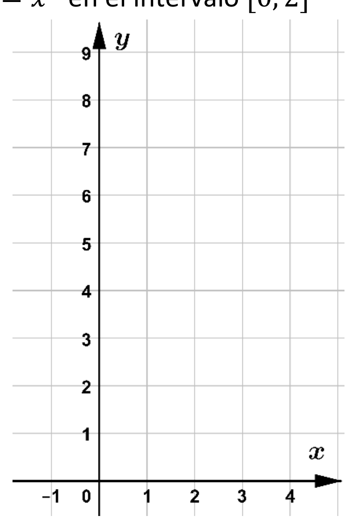
d) $f(x) = 2x^2$, en el intervalo [0, 2]



e) $f(x) = x^3$, en el intervalo $[1, 2]$



f) $f(x) = x^3$ en el intervalo $[0, 2]$



Soluciones.

a) $A = \frac{27}{2}\, u^2$

b) $A = \frac{9}{2}\, u^2$

c) $A = \frac{26}{3}\, u^2$

d) $A = \frac{16}{3}\, u^2$

e) $A = \frac{15}{4}\, u^2$

f) $A = 4\, u^2$

La función Área como antiderivada

Una antiderivada de la función $f(x) = x$ es $F(x) = \frac{x^2}{2}$, debido a que $F'(x) = x$, es decir, tenemos el proceso inverso a la derivación. ¿Cómo se relaciona esto con el área bajo la gráfica de una función? Para entenderlo mejor, determinemos el área bajo la gráfica de la función $f(x) = x$ en el intervalo $[0, a]$.

Calculamos la norma de la partición y el punto x_i de la partición. En este caso, dado el intervalo $[0,\ a]$, la norma de la partición Δx y el término x_i de la partición es tan dados por

$$\Delta x = \frac{a-0}{n} = \frac{a}{n}, \qquad x_i = 0 + i\Delta x = 0 + \frac{a \cdot i}{n} = \frac{ai}{n}.$$

$$A(a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$A(a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{ai}{n}\right)\left(\frac{a}{n}\right)$$

$$A(a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{ai}{n}\right]\left(\frac{a}{n}\right)$$

$$A(a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a^2 i}{n^2}\right)$$

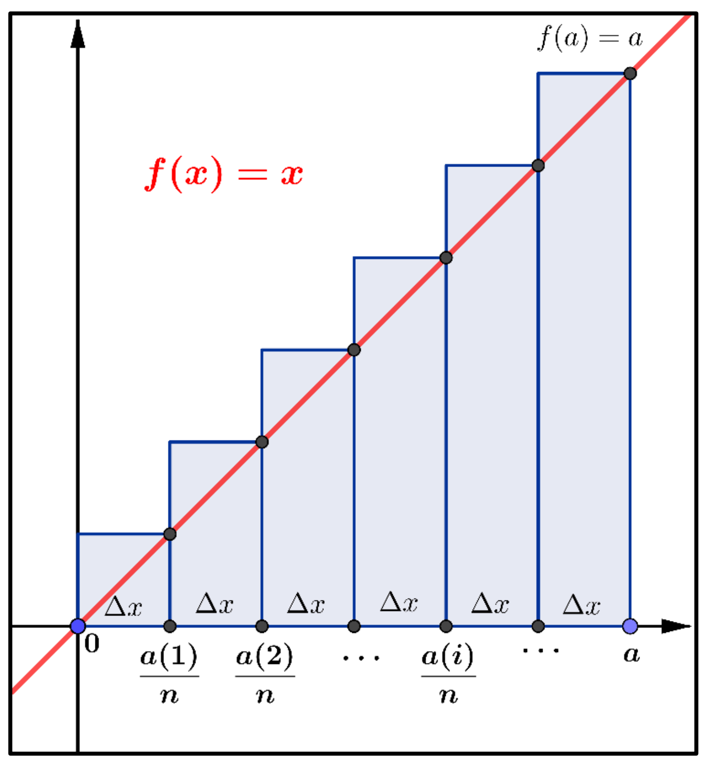
$$A(a) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a^2}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i\right]$$

$$A(a) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$A(a) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a^2(n+1)}{2n}\right]$$

$$A(a) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a^2 n}{2n} + \frac{a^2}{2n}\right]$$

$$A(a) = \frac{a^2}{2}$$



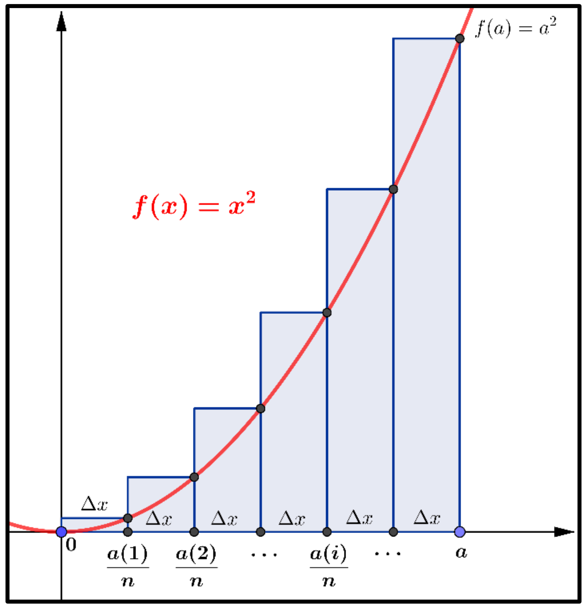
En este caso, el área bajo la gráfica de $f(x) = x$ en el intervalo $[0, a]$ puede definirse como

$$A(a) = \int_0^a x\, dx = \frac{a^2}{2}$$

Es decir, es la función antiderivada $F(x) = \frac{x^2}{2}$ evaluada en $x = a$.

De manera análoga, como una antiderivada de la función $g(x) = x^2$ es la función $G(x) = \frac{x^3}{3}$, el área bajo la gráfica de $g(x) = x^2$ en el intervalo $[0, a]$ está dada por

$$A(a) = \int_0^a x^2\, dx = \frac{a^3}{3}$$



Para la función cúbica $h(x) = x^3$, su función antiderivada es $H(x) = \frac{x^4}{4}$ y el área bajo la gráfica de la función en el intervalo $[0, a]$ es

$$A(a) = \int_0^a x^3\, dx = \frac{a^4}{4}$$

El Teorema Fundamental del Cálculo.

Anteriormente se calcularon las áreas bajo la curva de las funciones $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ y también $h(x) = x^3$ en el intervalo $[0, a]$, lo que nos llevó a usar una antiderivada de cada función: $F(x) = \frac{x^2}{2}$, $G(x) = \frac{x^3}{3}$ y $H(x) = \frac{x^4}{4}$. La manera en la que se puede calcular el *área* bajo la gráfica de funciones continuas está dada por la segunda parte del Teorema Fundamental del Cálculo, el cual anunciamos a continuación.

Teorema Fundamental del Cálculo (segunda parte)

Sea $f(x)$ una función continua, el *área* bajo la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ está dada por

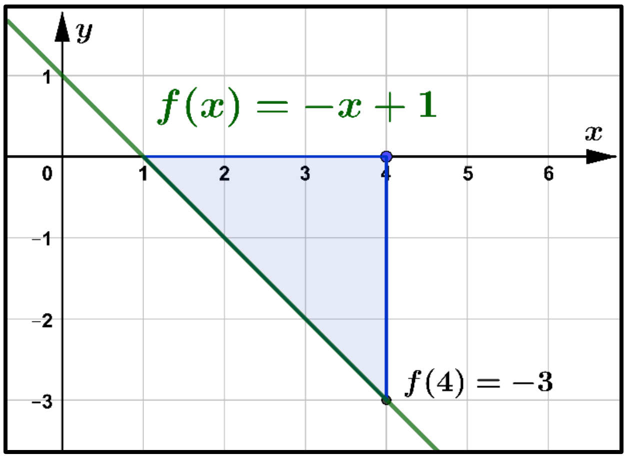
$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

En donde la función $F(x)$ es una antiderivada de la función $f(x)$, esto es, $F'(x) = f(x)$.

La palabra área está escrita en cursivas debido a que tomaremos áreas con signo positivo si la función es mayor a cero o negativa si la función es menor a cero.

La integral definida

Para calcular el área bajo la gráfica de una función se pidió que la función $f(x)$ fuera **positiva** y se determinó el área usando sumas de Riemann. ¿Qué sucede en el caso en el que la función es **negativa?** En este caso se obtendría un *área negativa*, debido a que la altura toma un valor negativo, tal como se muestra en el siguiente ejemplo con una función lineal.



Ejemplo: Calcular el "área" de entre la función $f(x) = -x + 1$ y el eje de las abscisas en el intervalo $[1, 4]$

Solución: Para calcular el área se usa la fórmula $A = \frac{(b-a)f(b)}{2}$. En este caso se tiene $a = 1, b = 4$.

$$A = \frac{(4-1)f(4)}{2} = \frac{3(-3)}{2} = -\frac{9}{2}$$

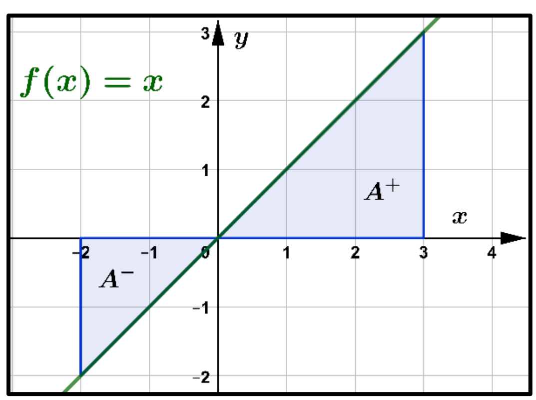
La **integral definida** nos proporciona el valor del área, positiva o negativa de una función en el intervalo indicado. Para calcular la integral definida se usa el Teorema Fundamental del Cálculo (Segunda parte), pues ello facilita las operaciones a realizar al usar solamente una función antiderivada.

Ejemplo: Calculemos el valor de la siguiente integral definida usando el Teorema fundamental del Cálculo.

$$\int_{-2}^{3} x\,dx$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{3} x\,dx &= \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-2}^{3} \\
&= \left[\frac{(3)^2}{2}\right] - \left[\frac{(-2)^2}{2}\right] \\
&= \frac{9}{2} - \frac{4}{2} \\
&= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$



Las letras A^- y A^+ indican las áreas positivas si se encuentran sobre el eje de las abscisas y negativas si se localizan debajo del eje respectivamente.

Ejemplo: Calcula el valor de la siguiente integral definida.

$$\int_1^2 (x^2 - 3x)\, dx$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (x^2 - 3x)\, dx &= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 \\
&= \left[\frac{(2)^3}{3} - \frac{3(2)^2}{2}\right] - \left[\frac{(1)^2}{3} - \frac{3(1)^2}{2}\right] \\
&= -\frac{10}{3} + \frac{7}{6} \\
&= -\frac{13}{6}
\end{aligned}$$

Propiedades de la integral definida.

Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son integrables en el intervalo $[a, b]$, se cumplen las siguientes propiedades.

1) $\int_a^b k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int_a^b f(x)\, dx$	La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.
2) $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$	El valor de la integral definida cambia de signo si se intercambian los límites de integración.
3) $\int_a^a f(x)\, dx = 0$	Si los límites de integración son iguales, entonces el valor de la integral es cero.
4) $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$	Si c es un punto en el intervalo (a, b), la integral definida se separa como la suma de dos integrales definidas en los intervalos $[a, c]$ y $[b, c]$.
5) $\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \int_a^b g(x)\, dx$	La integral definida de una suma de funciones es igual a la suma de la integral definida de cada función.

Ejercicios: Usa, cuando sea necesario, las propiedades de la integral definida para calcular lo siguiente.

1) $\int_{1}^{3} (x^2 - 3x + 1)\, dx =$

2) $\int_{3}^{5} (x - 2)^2\, dx =$

3) $\int_{-4}^{2} \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) dx =$

4) $\int_{0}^{3/2} (9x - 1)\, dx =$

5) $\int_{4}^{5} \left(-x + \frac{5}{6}\right) dx =$

6) $\int_{-\pi}^{\pi} x\, dx =$

7) $\int_{-2}^{3} (3x^2 - 2x + 1)\, dx =$

8) $\int_{5}^{3} (x^3 - 7x^2 + 9)\, dx =$

9) $\int_{2/3}^{4/3} (4x^3 - 5x - 3)\, dx =$

10) $\int_{0.8}^{1.7} \left(\frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x}{4} + 5\right) dx =$

Soluciones.

1) $I = -\frac{4}{3}$	2) $I = \frac{26}{3}$	3) $I = 9$	4) $I = \frac{68}{9}$	5) $I = -\frac{11}{3}$
6) $I = 0$	7) $I = 35$	8) $I = \frac{224}{3}$	9) $I = -\frac{64}{27}$	10) $I = 5.7$

Aplicaciones de la integral definida

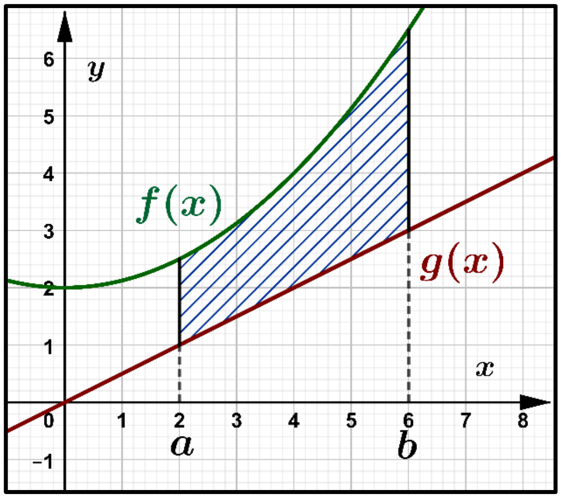
A continuación, se muestran aplicaciones de la integral definida tales como área comprendida entre dos funciones y cálculo de la distancia que recorre un objeto que se mueve en línea recta a partir de su velocidad.

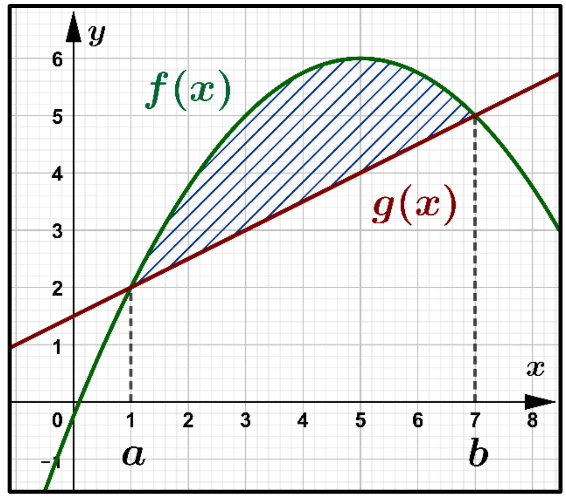
Área comprendida entre dos funciones

El área comprendida entre dos funciones se calcula mediante la siguiente integral definida.

$$A = \int_{a}^{b} [f(x) - g(x)]dx$$

En donde $f(x) \geq g(x)$ para todo valor de x en el intervalo $[a, b]$. Se pueden tener las situaciones que se ilustran a continuación.





En el primer caso solamente se realiza la integral definida en el intervalo indicado, pero en el segundo caso se deben determinar lo valores en donde se intersecan las funciones.

Ejemplo: Traza la gráfica de las funciones $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = -\frac{x}{2} - 1$ y calcula el área encerrada entre las curvas y las rectas $x = -2, x = 1$.

Solución: La función $f(x)$ es cuadrática y su gráfica es una parábola, mientras $g(x)$ es una función lineal, cuya gráfica corresponde a una recta. Notemos que $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[-2, 1]$. De lo anterior se tiene que el área encerrada se calcula de la siguiente manera.

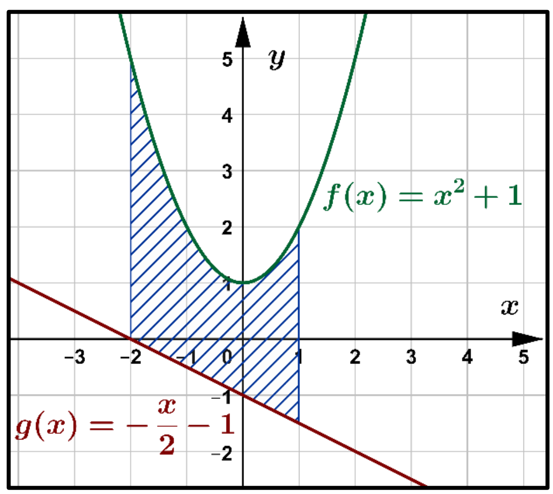
$$A = \int_{-2}^{1} [f(x) - g(x)]dx$$

$$A = \int_{-2}^{1} \left[x^2 - 1 - \left(-\frac{x}{2} - 1\right)\right] dx$$

$$A = \int_{-2}^{1} \left[x^2 + \frac{x}{2}\right] dx = x^3 + \frac{x^2}{4} \Bigg|_{-2}^{1}$$

$$A = \left[1^3 + \frac{1^2}{4}\right] - \left[(-2)^3 + \frac{(-2)^2}{4}\right]$$

$$A = 8.25\, u^2$$



Ejemplo: Calcular el área comprendida entre las gráficas de las funciones

$$f(x) = -\frac{x^2}{4} + x, \quad g(x) = \frac{x}{2} - 2.$$

Solución: En este caso no se proporcionan los límites de integración por lo que debemos determinarlos, para hacerlo se igualan las funciones y se resuelve la ecuación resultante.

$$f(x) = g(x) \implies -\frac{x^2}{4} + x = \frac{x}{2} - 2 \implies -\frac{x^2}{4} + x - \frac{x}{2} + 2 = 0 \implies -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 2 = 0$$

Los valores que resuelven la ecuación cuadrática son $x_1 = -2$ y $x_2 = 4$, dichos valores son los límites de integración.

Ahora se procede a calcular el área usando la integral definida. Observemos que $f(x) \geq g(x)$.

$$A = \int_{-2}^{4} [f(x) - g(x)]dx$$

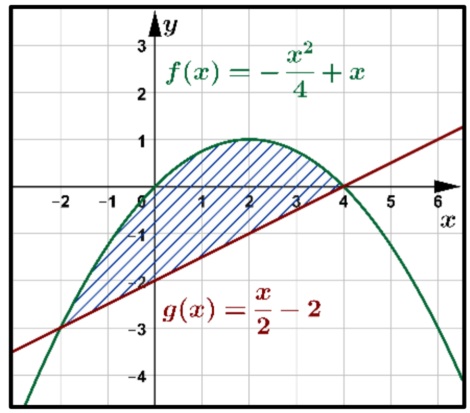
$$A = \int_{-2}^{4} \left[-\frac{x^2}{4} + x - \left(\frac{x}{2} - 2\right)\right] dx$$

$$A = \int_{-2}^{4} \left[-\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 2\right] dx$$

$$A = -\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4} + 2x \Big|_{-2}^{4}$$

$$A = \left[-\frac{4^3}{12} + \frac{4^2}{4} + 2(4)\right] - \left[-\frac{(-2)^3}{12} + \frac{(-2)^2}{4} + 2(-2)\right]$$

$$A = 9\, u^2$$



Ejercicios: Determina el área encerrada por las gráficas de las siguientes funciones

a) $f(x) = x^2 - 2$
$g(x) = x$

b) $f(x) = -x^2 + 5$
$g(x) = \frac{x^2}{4}$

c) $f(x) = -(x-4)^2 + 2$
$g(x) = x - 4$

d) $f(x) = x^3$
$g(x) = x$
En el intervalo $[-1, 1]$

e) $f(x) = x^3 - x^2 + 3$
$g(x) = x$
En el intervalo $[-1, 1]$

f) $f(x) = -x + 1$
$g(x) = (x-1)^2 + 2$
En el intervalo $[0, 3]$

g) $f(x) = \frac{x}{2} - 1$
$g(x) = x(x+1)(x+3)$
En el intervalo $[-3, 0]$

Soluciones:

a) $4.5\ u^2$ c) $\frac{9}{2}\ u^2$ e) $\frac{16}{3}\ u^2$ g) $7.5\ u^2$

b) $\frac{40}{3}\ u^2$ d) $0\ u^2$ f) $10.5\ u^2$

Cálculo de la distancia a partir de la velocidad.

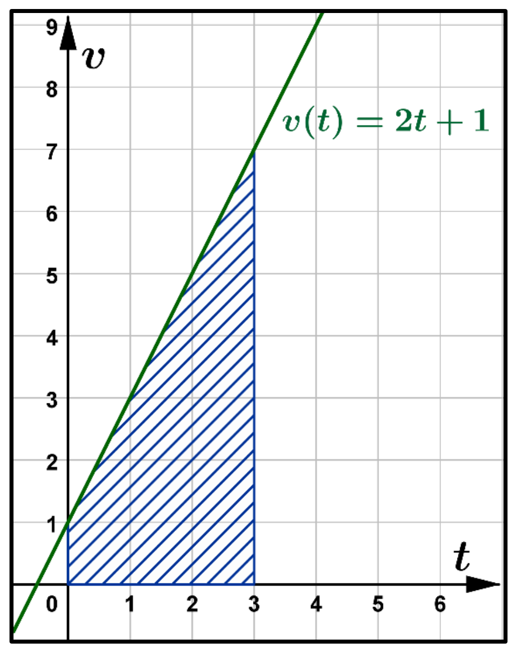
Es posible calcular la distancia recorrida por una partícula en el intervalo de tiempo $a \leq t \leq b$ a partir de la función velocidad $v(t)$, la distancia es el área bajo la gráfica de velocidad.

$$d = \int_a^b v(t)\, dt$$

Las unidades se obtienen de multiplicar las de velocidad por el tiempo. A continuación, se muestra un ejemplo de cómo calcularlo.

Ejemplo: Una partícula se mueve a lo largo de una recta con velocidad $v(t) = 2t + 1$. ¿Cuál es la distancia recorrida en el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 3$? La velocidad está medida en metros sobre segundos y el tiempo en segundos.

Solución: En este caso la función velocidad es mayor a cero en el intervalo de tiempo indicado, como se muestra en la gráfica, por lo que se calcula el área con la integral definida.



$$d = \int_0^3 (2t + 1)\, dt$$

$$d = (t^2 + t)\Big|_0^3$$

$$d = [3^2 + 3] - [0^2 - 0]$$

$$d = 12\ m$$

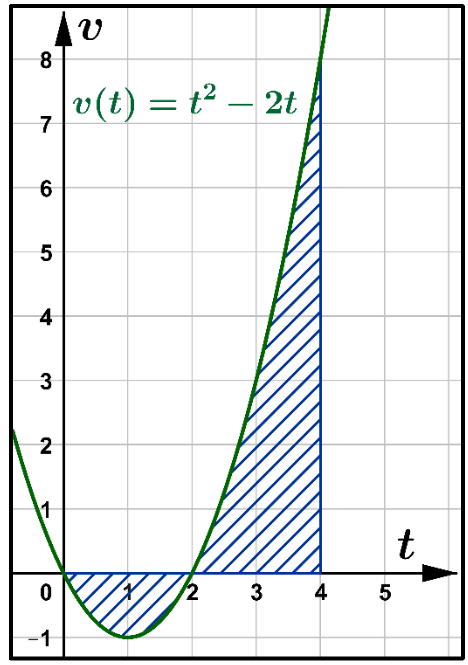
En el caso de que la partícula se desplace a la derecha y a la izquierda, esto es, la función velocidad es positiva en un intervalo y negativo en otro, para calcular la distancia recorrida se usa la siguiente fórmula.

$$d = \int_a^b |v(t)|\ dt$$

Se usará $|v(t)| = -v(t)$ en donde la función es negativa y $|v(t)| = v(t)$ en donde la función es positiva.

Ejemplo: Una partícula se mueve a lo largo de una recta de modo que su velocidad en el instante t es $v(t) = t^2 - 2t$ (medida en metros por segundo). Determinar la distancia recorrida por la partícula en el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 4$.

Solución. Como puede observarse en la gráfica de la función velocidad, en el intervalo $0 \leq t \leq 2$ la velocidad es negativa y mientras en $2 < t \leq 4$ es positiva, por lo que la distancia se calcula de la siguiente manera.



$$d = \int_0^4 |t^2 - 2t|\, dt$$

$$d = \int_0^2 -(t^2 - 2t)\, dt + \int_2^4 (t^2 - 2t)\, dt$$

$$d = \left(-\frac{t^3}{3} + t^2\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{t^3}{3} - t^2\right)\Bigg|_2^4$$

$$d = \frac{4}{3} + \frac{20}{3}$$

$$d = 8\, m$$

Ejercicios: Resuelve los siguientes problemas de aplicación de la integral definida.

a) Una partícula se mueve a lo largo de una recta con velocidad $v(t) = t - 2$. ¿Cuál es la distancia recorrida en el intervalo de tiempo $1 \leq t \leq 4$? La velocidad está medida en metros sobre segundo y el tiempo en segundos.

b) Un objeto se mueve a lo largo de una recta de modo que su velocidad en el instante t es $v(t) = \frac{t^2}{2} - 2t + 2$ (medida en metros por segundo). Determinar la distancia recorrida por la partícula en el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 5$.

Solución:

a) $2.5\, m$

b) $\frac{35}{6}\, m$

Unidad 3. La integral indefinida

Presentación

Hasta ahora hemos estudiado a la integral definida a través del cálculo de áreas delimitadas por distintas funciones. También se ha resuelto el problema de que, dada una función, es posible hallar su función derivada. Sin embargo, existen muchas aplicaciones en las que nos enfrentaremos al problema inverso: dada la derivada de una función, determinar la función original.

Definiremos el concepto de función primitiva y la implicación de considerar una constante de integración al resolver una integral. A partir del conocimiento y manejo de reglas de derivación en unidades anteriores, se construirá una tabla de integrales inmediatas.

La integral como operación inversa a la derivada

Ejemplo. Determinar la función F, cuya derivada es $F'(x) = 2x$.

Recordando las reglas de derivación, sabemos que $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$, por lo que la función F que buscamos es $F(x) = x^2$ y se conoce como antiderivada o primitiva de $F'(x)$.

Ahora que hemos visto que la derivada y la antiderivada son operativamente inversas, denotaremos a la función $F'(x)$, simplemente como $f(x)$, para estar acorde con la literatura matemática.

Diremos entonces que $F(x)$ es **una antiderivada** de $f(x)$, ahora veremos por qué.

La función $F(x) = x^2 + 5$ también es una antiderivada de $f(x)$ ya que:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 5) = 2x$$

Hemos construido una conclusión valiosa: Existen una infinidad de funciones tales que su derivada es $f(x) = 2x$. Luego, $f(x)$ es derivada de todas las funciones $\boldsymbol{x^2 + C}$, donde C puede ser cualquier constante.

De aquí se desprende el hecho de no poder acotar la respuesta a que la antiderivada más general de la función $f(x) = 2x$, es simplemente $F(x) = x^2$, sino más bien $F(x) = x^2 + C$, para considerar a todas las funciones que satisfacen.

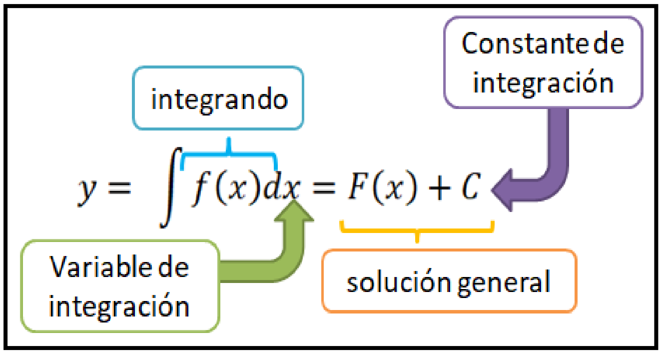
Definición. Una función F es una antiderivada (o primitiva) de una función f en un intervalo I si la derivada de F es f, esto es $F'(x) = f(x)$ para toda x, en el intervalo I.

Hay que considerar que

- Para que $F'(x)$ exista, la función $F(x)$ debe ser continua.
- $F(x)$ no es única

La integral indefinida

La operación mediante la cual es posible hallar todas las soluciones de esta ecuación se conoce como integración. Entonces tenemos que:



A la expresión $\int f(x)dx$ también se le conoce como **integral indefinida** de f respecto de x.

Observación: Hay que tener cuidado de manejar indistintamente el concepto de diferencial y derivada. La primera expresa una variación "muy pequeña" de la variable o función, mientras que la segunda es básicamente un cociente de diferenciales, es decir, una razón de cambio instantánea.

La relación entre la derivada de una función y sus diferenciales es la siguiente

$$dy = f'(x)dx$$

Fórmulas inmediatas de integración

Ahora que hemos explicado los conceptos que están detrás de una integral definida, podemos concentrarnos en la parte algorítmica de ellas, para poder utilizarlas en problemas diversos.

Ya hemos visto que resolver una integral indefinida, no es otra cosa que encontrar la familia de funciones, tales que su derivada es el integrando.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Así obtuvimos que

$$\int 2xdx = x^2 + C$$

Completa la siguiente tabla:

Función del integrando $\int \boldsymbol{f(x)dx}$	**Antiderivada** $\boldsymbol{F(x) + C}$
3	
$7x^6$	
$6x$	

x^{10}	
k	
	$\frac{m}{2}x^2 + C$
$\frac{3}{5}x^3$	

La intención de resolver las integrales de la tabla es familiarizarnos con la regla vista anteriormente

$$\int \boldsymbol{x^n dx} = \frac{\boldsymbol{x^{n+1}}}{\boldsymbol{n+1}} + \boldsymbol{C}$$

Para resolver integrales indefinidas, conviene utilizar las siguientes propiedades:

1) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx;$ donde k es una constante

2) $\int [u+v-w]dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ donde u, v y w son funciones de x

Ejemplo: Completa el procedimiento de solución de la integral definida:

$$\boldsymbol{I = \int \left(4x^3 - 5\sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^2}\right) dx}$$

Aplicando la propiedad 2

$$I = \int 4x^3 dx - \int 5x^{1/3} dx + \int \frac{3}{x^2} dx$$

Con la propiedad 1

$$I = 4\int x^3\, dx - 5\int x^{1/3} dx + 3\int x^{-2} dx$$

Integrando

$$I = 4\frac{x^4}{4} - 5\frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}} + 3\frac{x^{-1}}{-1} + C$$

Finalmente

$$I = x^4 - \frac{15}{4}\sqrt[3]{x^4} - \frac{3}{x} + C$$

Se dice que una integral es inmediata si se resuelve usando directamente una fórmula de integración.

Utiliza tus conocimientos sobre derivadas para completar la siguiente tabla:

Función del integrando $\int \boldsymbol{f(x)dx}$	**Familia de antiderivadas** $\boldsymbol{F(x) + C}$
$\cos(x)$	
	$e^x + C$
$\sec^2(x)$	
	$-\cos(x) + C$
$csc(x) \cdot cot(x)$	
	$\frac{1}{x} + C$
2^x	
	$-\csc(x) + C$

Ahora te proporcionamos una lista de fórmulas de integración

1) $\int dx = x + c$

2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

3) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

4) $\int sen(u)du = -cos(u) + c$

5) $\int cos(u)du = sen(u) + c$

6) $\int sec^2(u)du = tan(u) + c$

7) $\int csc^2(u)du = -cot(u) + c$

8) $\int sec(u)\, tan(u)\, du = sec(u) + c$

9) $\int csc(u)\, cot(u)\, du = -csc(u) + c$

10) $\int e^u du = e^u + c$

11) $\int a^u du = \frac{1}{\ln a} \cdot a^u + c$

12) $\int \frac{du}{u} = ln|u| + c$

Donde a y n son constantes y u es una función de x.

Ejemplo: Resolver la siguiente integral

$$I = \int \left[6e^z - \frac{3}{2\sqrt{z^5}} + \frac{sen(z)}{5} - 2\right] dz$$

Propiedad 1 y 2

$$I = 6\int e^z dz - \frac{3}{2}\int z^{-5/2} dz + \frac{1}{5}\int sen(z) dz - 2\int dz$$

Integrando y simplificando

$$I = 6e^z + \frac{1}{\sqrt{z^3}} - \frac{1}{5}cos(x) - 2z + C$$

Comprobación: Podemos verificar que hemos encontrado la solución general correcta, derivándola.

$$\frac{d}{dz}\left[6e^z + \frac{1}{\sqrt{z^3}} - \frac{1}{5}\cos(z) - 2z + C\right] = \frac{d}{dz}\left[6e^z + z^{-3/2} - \frac{1}{5}\cos(z) - 2z + C\right]$$

$$= 6e^z - \frac{3}{2}z^{-5/2} - \frac{1}{5}(-sen(z)) - 2 + 0 = \boldsymbol{6e^z - \frac{3}{2\sqrt{z^5}} + \frac{sen(z)}{5} - 2} \text{ que es el integrando}$$

Ejemplo: *Resolveremos ahora la siguiente integral:*

$$I = \int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{4x^5} + \frac{7 - x}{9x}\right)dx$$

Podemos distribuir la fracción del segundo término

$$I = \int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{4x^5} + \frac{7}{9x} - \frac{x}{9x}\right)dx$$

Aplicamos propiedades de las integrales

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x^5}dx + \frac{7}{9}\int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{9}\int \frac{x}{x}dx$$

Debemos utilizar las leyes de los exponentes, para que los integrandos se simplifiquen y puedan integrarse de manera directa:

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{x^{1/3}}{x^5}dx + \frac{7}{9}\int x^{-1}dx - \frac{1}{9}\int dx$$

En el caso de la primera integral, debemos reducir a x con un solo exponente de manera que se pueda aplicar la fórmula 2. Para el caso de la segunda integral, no es posible aplicar esta fórmula, debido a que se tendría la expresión $\frac{x^0}{0}$, por lo que lo volvemos a escribir como al inicio:

$$I = \frac{1}{4}\int x^{-14/3}dx + \frac{7}{9}\int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{9}\int dx$$

Ahora es claro que las fórmulas de integración a utilizar son la 2 y la 12. Integramos

$$I = \frac{1}{4}\frac{x^{-11/3}}{-\frac{11}{3}} + \frac{7}{9}ln|x| - \frac{x}{9} + C$$

Operando las fracciones y expresando los exponentes como positivos y raíces, resulta

$$\boldsymbol{I = -\frac{3}{44\sqrt[3]{x^{11}}} + \frac{7ln|x|}{9} - \frac{x}{9} + C}$$

Observa que se considera el valor absoluto del argumento del logaritmo natural, pues este debe ser un valor mayor a cero.

Ejercicios de integrales inmediatas: Obtener las soluciones generales de las siguientes integrales indefinidas:

1) $\int \left(4x^5 - \frac{x^3}{2} + \pi x^2 - \frac{1}{x} - 1\right) dx$

2) $\int \frac{10\sqrt[4]{x} + \pi x - 7}{5} dx$

3) $\int \left(\frac{sec^2(x)}{5} - \frac{e^x}{3} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$

4) $\int (3w-1)^2 dw$

5) $\int \left(2\,csc^2(x) - \sqrt[11]{x^2} + \frac{1}{8x}\right) dx$

6) $\int \frac{5x^8 - 12x^3 + \sqrt[3]{x^2}}{4x^3} dx$

7) $\int \left(\frac{\sqrt[8]{x}}{7} - \frac{5sec(x)tan(x)}{6} - 5^x\right) dx$

8) $\int (t - 5t^2)(\sqrt{t} + 1) dt$

9) $\int \frac{2x^6 - 8\sqrt{x^7} - m^2}{9\sqrt{x}} dx$

10) $\int \frac{(2x-5)^2}{3x} dx$

Soluciones:

1) $I = \frac{2x^6}{3} - \frac{x^4}{8} + \frac{\pi x^3}{3} - ln|x| - x + C$

2) $I = \frac{8\sqrt[4]{x^5}}{5} - \frac{\pi x^2}{10} - \frac{7x}{5} + C$

3) $I = \frac{tan(x)}{5} - \frac{e^x}{3} + 3\sqrt[3]{x^2} + C$

4) $I = 3w^3 - 3w^2 + w + C$

5) $I = -2\,cot(x) - \frac{11\sqrt[11]{x^{13}}}{13} + \frac{ln|x|}{8} + C$

6) $I = \frac{5x^6}{24} - 3x - \frac{3}{16\sqrt[3]{x^4}} + C$

7) $I = \frac{8\sqrt[8]{x^9}}{63} - \frac{5sec(x)}{6} - (ln5)(5^x) + C$

8) $I = \frac{2\sqrt{t^5}}{5} + \frac{t^2}{2} - \frac{10\sqrt{t^7}}{7} - \frac{5t^3}{3} + C$

9) $I = \frac{4\sqrt[2]{x^{13}}}{117} - \frac{2x^4}{9} - \frac{2m^2\sqrt{x}}{9} + C$

10) $I = \frac{2x^2}{3} - \frac{-20x}{3} + \frac{25ln|x|}{3} + C$

Relación entre la condición inicial y la constante de integración

Para determinar **una antiderivada** particular, se debe conocer un punto que pertenecía a la función original, es decir, **una condición inicial**

Ejemplo. Determina la antiderivada de la función $f(x) = \frac{3}{x}$ sabiendo la condición inicial $F(e) = -2$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{luego} \quad \int \frac{3}{x} dx = 3ln|x| + C$$

Entonces, la familia de antiderivadas es

$$F(x) = 3ln|x| + C$$

Sustituimos la condición inicial

$$-2 = 3ln|e| + C$$

Recordemos que la función logaritmo natural, y la función exponencial base e son inversas, por lo que:

$$-2 = 3 + C$$

Despejando la constante

$$C = -5$$

Entonces, la antiderivada buscada es

$$F(x) = 3ln|x| - 5$$

Ejercicios de integrales dada una condición inicial: Dada la función $f(x)$ y la condición inicial, determina su respectiva antiderivada:

1) $f(x) = 12x^5 - 20x^3 + 3;\ \ si\ F(4) = 17$

2) $g(x) = 5 - \frac{1}{\sqrt{x}};\ \ si\ F(-1) = -8$

3) $h(x) = -2sen(x) - 1;\ \ si\ F(0) = 12$

4) $i(x) = x^2 - \frac{7x}{4};\ \ si\ F(-3) = \frac{3}{2}$

5) $j(x) = 2x^7 - 15x^4 + 2;\ \ si\ F(2) = -22$

6) $k(x) = 4e^x + 2sen(x);\ \ si\ F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\left(e^{\pi/2} - 1\right)$

7) $l(x) = \frac{cos(x)}{5} - \frac{4}{\pi};\ \ si\ F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{24}{5}$

8) $m(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3};\ \ si\ F\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{2}$

Soluciones:

1) $F(x) = 2x^6 - 5x^4 + 3x - 2$

2) $G(x) = 5x - 2\sqrt{x} + 1$

3) $H(x) = 2\cos(x) - x + 10$

4) $I(x) = x^2 - \frac{7x}{4}$

5) $J(x) = \frac{x^8}{4} - 3x^5 + 2x + 6$

6) $K(x) = 4e^x - 2cos(x) - 4$

7) $L(x) = \frac{sen(x)}{5} - \frac{4x}{\pi} - 3$

8) $M(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{2}$

Método de integración por cambio de variable o sustitución

La integración por cambio de variable ayuda a resolver integrales que son más complejas. Consiste en resolver la integral en términos de una nueva variable (generalmente se le llama u), de tal forma la integral se resuelva como si fuera inmediata.

Para que sea aplicable el método, se debe verificar que la diferencial de la nueva variable esté completa, es decir, que se encuentre multiplicando la derivada, o solo haga falta multiplicar por una constante.

Ejemplo: Obtendremos la integral de la siguiente función

$$I = \int e^{3x/5} dx$$

Es evidente que la fórmula de integración que utilizaremos es la número 10, sin embargo, debemos completar la diferencial del argumento.

Hacemos el análisis de cambio de variable $\begin{cases} u = \frac{3x}{5} \\ du = \frac{3}{5} dx \end{cases}$

Multiplicamos por $\frac{3}{5}$ para tener a la diferencial completa, pero también por $\frac{5}{3}$ para que no se altere el resultado de nuestra integral ya que $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = 1$

$$I = \int e^{3x/5} \cdot \mathbf{\frac{3}{5}} \cdot \mathbf{\frac{5}{3}} dx$$

Aplicamos la propiedad 1 de las integrales y sustituimos por u

$$I = \frac{5}{3} \int e^{3x/5} \cdot \frac{3}{5} dx = \frac{5}{3} \int e^u du$$

Integramos y regresamos a la variable x.

$$I = \frac{5}{3} e^u + C = \boldsymbol{\frac{5}{3} e^{3x/5} + C}$$

Comprobación

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{5}{3} e^{3x/5} + C\right] = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} e^{3x/5} = e^{3x/5}$$

Ejercicios cambio de variable

1) $\int e^{-x}dx$

2) $\int sen\left(\frac{x}{3}\right)dx$

3) $\int cos\left(\frac{4x}{7}\right)dx$

4) $\int \sec^2(4x)dx$

5) $\int e^{-8x}dx$

6) $\int sen\left(-\frac{6t}{\pi}\right)dt$

7) $\int 4^{3x}dx$

8) $\int \csc^2(3x)dx$

9) $\int e^{\pi z}dz$

10) $\int cos\left(-\frac{x}{w}\right)dx$

Soluciones

1) $I = -e^{-x} + C$

2) $I = -3cos\left(\frac{x}{3}\right) + C$

3) $I = \frac{7}{4}sen\left(\frac{4x}{7}\right) + C$

4) $I = \frac{1}{4}tan(4x) + C$

5) $I = -\frac{1}{8}x^{-8x} + C$

6) $I = \frac{\pi}{6}cos\left(-\frac{6t}{\pi}\right) + C$

7) $I = \frac{1}{3}\ln(4) \cdot 4^{3x} + C$

8) $I = -\frac{1}{3}\cot(3x) + C$

9) $I = \frac{1}{\pi}e\pi^{z} + C$

10) $I = \ -wsen\left(-\frac{x}{w}\right) + C$

Con los ejercicios anteriores, te habrás dado cuenta de que las integrales de funciones trascendentes cuyo argumento es lineal, se pueden integrar de la siguiente manera

$$\int cos\left(\frac{a}{b}x\right)dx = \frac{b}{a}sen\left(\frac{a}{b}x\right) + C \qquad \int e^{ax/b}dx = \frac{b}{a}e^{ax/b} + C$$

Se observa que los argumentos de las funciones trascendentes se mantienen sin modificación, y solo se multiplica por el recíproco de la constante del argumento.

Ahora veremos integrales con cambios de variable diverso

Ejemplo. Resolver la integral

$$I = \int (5x-3)^6dx$$

Analizando la integral, podemos desarrollar el binomio a la sexta potencia, con ayuda del triángulo de Pascal, obteniendo siete términos y luego mediante propiedades, resolver siete integrales inmediatas. Esto resulta un procedimiento impráctico, pues qué sucedería si el exponente del binomio fuera 100, por ejemplo.

Podemos resolver de manera más sencilla utilizando un cambio de variable:

Asignamos el nombre de u a la parte del integrando, tal que esté multiplicando su derivada o casi su derivada (que difiera en una constante).

Nos damos cuenta de que si $\begin{cases} u = 5x - 3 \\ du = 5dx \end{cases}$

Entonces solo faltaría la constante 5 para tener completa la diferencial, esto es:

$$I = \int (5x-3)^6 \cdot \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{5}} dx = \frac{1}{5}\int u^6 du$$

Integramos con la fórmula 3 y después sustituimos la equivalencia de u:

$$I = \frac{1}{5} \cdot \frac{u^7}{7} + C = \frac{(5x-3)^7}{35} + C$$

Comprobación

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(5x-3)^7}{35} + C\right] = \frac{1}{35} \cdot 7(5x-3)^6(5) = (5x-3)^6; \ \therefore \text{ se verifica}$$

Cuando se resuelven integrales por este método, la clave está en la elección del cambio de variable adecuado. ***En el caso de las funciones algebraicas u suele ser la función que está siendo afectada por el exponente principal.***

Ejemplo*:* Ahora resolveremos la integral

$$I = \int \frac{3x^2 - 5x}{\sqrt[3]{2x^3 - 5x^2}} dx$$

Vale la pena que, de inicio, intentemos visualizar la fórmula de integración que parece que resolverá nuestra integral. En este caso, sabemos que la raíz cúbica equivale a tener un exponente $\frac{1}{3}$, así que posiblemente terminaremos usando la fórmula 3 de integrales.

Siguiendo la recomendación, proponemos: $\begin{cases} u = 2x^3 - 5x^2 \\ du = (6x^2 - 10x)dx \end{cases}$

Nos podemos dar cuenta de que hace falta multiplicar por 2 al numerador del integrando, para que la diferencial esté completa, sin olvidar que también se debe multiplicar por $\frac{1}{2}$ para no alterar la expresión:

$$I = \int \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{2}} \cdot \frac{3x^2 - 5x}{\sqrt[3]{2x^3 - 5x^2}} dx$$

Entonces, tenemos:

$$I = \int \frac{6x^2 - 10x}{2\sqrt[3]{2x^3 - 5x^2}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{6x^2 - 10x}{\sqrt[3]{2x^3 - 5x^2}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt[3]{u}}$$

Luego

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^{1/3}}=\frac{1}{2}\int u^{-1/3}du$$

En efecto, se utilizará la fórmula 3 de integración.

$$I=\frac{1}{2}\frac{u^{2/3}}{\frac{2}{3}}+C$$

Simplificando las fracciones y sustituyendo u

$$I=\frac{3}{4}(2x^3-5x^2)^{2/3}+C=\boldsymbol{\frac{3}{4}\sqrt[3]{(2x^3-5x^2)^2}+C}$$

Comprobación

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{3}{4}\sqrt[3]{(2x^3-5x^2)^2}+C\right]=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}(2x^3-5x^2)^{-1/3}(6x^2-10x)$$

Simplificando

$$=\frac{6}{12}(2x^3-5x^2)^{-1/3}(6x^2-10x)=\frac{1}{2}(2x^3-5x^2)^{-1/3}(6x^2-10x)$$

$$=\frac{6x^2-10x}{2\,(2x^3-5x^2)^{-1/3}}=\boldsymbol{\frac{3x^2-10x}{\sqrt[3]{2x^3-5x^2}}};\ \therefore \text{ se verifica}$$

Nota: Otro punto clave para la elección del cambio de variable es tener habilidad derivando, pues debemos buscar que u sea aquella función, tal que su diferencial se pueda completar multiplicando por una constante. Revisemos la siguiente integral como ejemplo.

Ejemplo

$$I=\int e^{sen\left(\frac{x}{4}\right)}\cos\left(\frac{x}{4}\right)dx$$

Si hacemos el ejercicio de pensar en una fórmula de integración que nos resuelva, posiblemente se nos ocurran la 4, la 5 y la 10.

- Si u fuera la función exponencial $e^{sen\left(\frac{x}{4}\right)}$ no hay forma de completar la diferencial con una constante, puesto que la derivada de esta función requiere estar $e^{sen\left(\frac{x}{4}\right)}$ multiplicando.
- Si u fuera la función $cos\left(\frac{x}{4}\right)$, debería estar multiplicando su diferencial, o sea $-\frac{1}{4}sen\left(\frac{x}{4}\right)$ y además no se podría acomodar la función exponencial.
- Si u fuera la función del exponente de la exponencial, o sea, $sen\left(\frac{x}{4}\right)$, su diferencial es $\frac{1}{4}\cos(4x)$, y solo hace falta la constante $\frac{1}{4}$ (lo cual no nos genera mayor problema). Además, ahora se observa claro que la fórmula de integración sería la número 10.

Proponemos

$$\begin{cases} u = sen\left(\frac{x}{4}\right) \\ du = \frac{1}{4} cos\left(\frac{x}{4}\right) dx \end{cases}$$

Completamos la diferencial, multiplicando por el neutro multiplicativo $\frac{4}{4}$

$$I = \int e^{sen(5x)} \cdot \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{4}} \cdot \cos(5x)\, dx = 4 \int e^{sen\left(\frac{x}{4}\right)} \cdot \frac{1}{4} cos\left(\frac{x}{4}\right) dx$$

Sustituimos en términos de u

$$I = 4 \int e^{u} du$$

Integramos y regresamos a la variable x.

$$I = 4e^{u} + C = \boldsymbol{4e^{sen\left(\frac{x}{4}\right)} + C}$$

Comprobación

$$\frac{d}{dx}\left[4e^{sen\left(\frac{x}{4}\right)} + C\right] = 4e^{sen\left(\frac{x}{4}\right)} \cdot cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} = e^{sen\left(\frac{x}{4}\right)} \cdot cos\left(\frac{x}{4}\right);\ \therefore\ se\ verifica$$

Ejemplo

$$I = \int \frac{sec^{2}(3x)}{2 + tan\,(3x)} dx$$

Para la elección de u sondeamos cuál de las funciones es derivada de cuál. Recordemos que la derivada de la función tangente es la secante al cuadrado. No es posible que la constante 2 salga de la integral, puesto que está inmersa en una suma y no es un producto. Esta constante no genera problema al ser incluida en u, puesto que su derivada es 0.

Definimos $\begin{cases} u = 2 + tan\,(3x) \\ du = 3\, sec^{2}(3x) dx \end{cases}$

Observamos Que para que la diferencial esté completa, hace falta multiplicar por 3.

$$I = \int \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{3}} \cdot \frac{sec^{2}(3x)}{2 + tan\,(3x)} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3 \sec^{2}(3x)}{2 + \tan\,(3x)} dx = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u}$$

Integramos con la fórmula 12

$$I = \frac{1}{3} ln|u| + C = \boldsymbol{\frac{1}{3} ln|2 + \tan\,(3x)| + C}$$

Hemos dicho que la Integración por el método de cambio de variable se utiliza cuando solo hace falta multiplicar por una constante para completar la diferencial. Sin embargo, pueden usarse algunos artificios matemáticos para integrar por cambio de variable, como se muestra:

Ejemplo: Queremos resolver

$$I = \int x \sqrt[4]{(x+1)}dx$$

Proponemos el siguiente cambio de variable $\begin{cases} u = x+1 \\ du = dx \end{cases}$

Está completa la diferencial, así que expresamos la integral en términos de u.

$$I = \int x \cdot u^{1/4} du$$

Aún no podemos decir que es exitoso el cambio de variable, ya que no debería aparecer la variable x.

Sabiendo que se definió $u = x+1$, se puede obtener, mediante despeje que $x = u-1$ y lo sustituimos en la integral, resultando:

$$I = \int (u-1)\, u^{1/4} du$$

Se efectúa la multiplicación

$$I = \int \left(u^{5/4} - u^{1/4}\right) du = \int u^{5/4} du - \int u^{1/4} du$$

Integramos y sustituimos u.

$$I = \frac{u^{9/4}}{\frac{9}{4}} - \frac{u^{5/4}}{\frac{5}{4}} + C = \frac{4}{9}\sqrt[4]{(x+1)^9} - \frac{4}{5}\sqrt[4]{(x+1)^5} + C$$

Ejercicios de Integración por cambio de variable

1) $\int x^9 \cos(3x^{10})\, dx$

2) $\int (2x-3)^5 \cdot 2dx$

3) $\int \frac{x^2}{(x^3+1)^5} dx$

4) $\int \frac{sen(5x)}{cos\,(5x)} dx$

5) $\int \int \frac{5x}{\sqrt[3]{(x^2-10)^7}} dx$

6) $\int e^{2x} \sqrt{1+e^{2x}} dx$

7) $\int sen^4(3x-4) \cos(3x-4)\, dx$

8) $\int e^{x/3} \csc^2\left(e^{x/3}\right) dx$

9) $\int \frac{ln(x^6)}{2x} dx$

10) $\int \frac{cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

11) $\int \frac{10}{x \cdot ln(x^2)} dx$

12) $\int 3x^2 \sec(4x^3)\, tan(4x^3) dx$

13) $\int x \sqrt[3]{x-5} dx$

14) $\int \frac{x+5}{4-x} dx$

15) $\int \frac{4}{7t-2}dt$

16) $\int 3\sec^2(\pi x)\cdot 5^{tan(\pi x)}dx$

17) $\int \frac{3e^{1/x}}{x^2}dx$

18) $\int \frac{sen(ln2x^3)}{8x}dx$

19) $\int \frac{sen(8x)}{(5-\cos(8x))^2}dx$

20) $\int \frac{e^{sen\sqrt{x}}cos\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}dx$

Soluciones

1) $I = \frac{1}{30}sen(3x^{10}) + C$

2) $I = \frac{(2x-3)^6}{6} + C$

3) $I = -\frac{1}{12(x^3+1)^4} + C$

4) $I = -\frac{1}{5}ln|\cos(5x)| + C$

5) $I = -\frac{15}{8\sqrt[3]{(x^2-10)^4}} + C$

6) $I = \frac{1}{3}\sqrt{(1+e^{2x})^3} + C$

7) $I = \frac{1}{15}sen^5(3x-4) + C$

8) $I = -3cot\left(e^{x/3}\right) + C$

9) $I = \frac{1}{24}\ln^2(x^6) + C$

10) $I = 2sen\sqrt{x} + C$

11) $I = 5\cdot ln|lnx^2| + C$

12) $I = \frac{1}{4}\sec(4x^3) + C$

13) $I = \frac{3}{7}\sqrt[3]{(x-5)^7} + \frac{15}{4}\sqrt[3]{(x-5)^4} + C$

14) $I = -9ln|4-x| + 4 - x + C$

15) $I = \frac{4}{7}ln|7t-2| + C$

16) $I = \frac{3\ln(5)}{\pi}5^{\tan(\pi x)} + C$

17) $I = -3e^{1/x} + C$

18) $I = \frac{1}{24}cos(ln2x^3) + C$

19) $I = -\frac{1}{8(5-\cos(8x))} + C$

20) $I = \frac{2}{3}e^{sen\sqrt{x}} + C$

Método de integración por partes

Se utiliza este método cuando se tiene que integrar el producto de dos funciones y ninguna de ellas es derivada de la otra, es decir, **cuando no aplica un cambio de variable**.

La fórmula de integración por partes es la siguiente.

$$\boxed{\int \boldsymbol{udv} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} - \int \boldsymbol{vdu}}$$

- Las funciones que se están multiplicando son u y dv.
- De la primera de ellas, necesitamos su diferencial du y de la segunda, su integral v.

La elección de las funciones del integrando como u y dv ES MUY IMPORTANTE, pues dependiendo de ello, podrá tenerse un camino más sencillo, o incluso, puede que no logremos resolver exitosamente. En general, la elección de una de ellas como u dependerá del tipo de función que se tenga.

Debido a que algunas funciones son muy complejas de integrar, se recomienda que dv sea la más fácil de integrar. Entonces, en este método, para la elección de u, se sugiere la siguiente preferencia:

Preferencia para elegir u ↓	**TIPO DE FUNCIÓN**	**EJEMPLO**
	Inversas	$f(x) = \text{arcsen}(x)$
	Logarítmicas	$f(x) = \ln(x)$
	Algebraicas	$f(x) = x^2 - 3$
	Trigonométricas	$f(x) = \cos(5x)$
	Exponenciales	$f(x) = e^x$

Al comparar las dos funciones que se están multiplicando, el tipo de función que esté más arriba es la que tiene preferencia para ser llamada u.

Ejemplo. Buscamos la integral de la función

$$I = \int xsen(3x)dx$$

Las funciones involucradas en el integrando son algebraica x y trigonométrica $sen(3x)$, por lo que definiremos:

$$u = x \qquad dv = sen(3x)dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{1}{3}cos\,(3x)$$

Luego, se sustituye en la fórmula de integración por partes

$$I = u \cdot v - \int vdu$$

$$I = x \cdot \frac{1}{3}cos(3x) - \int \frac{1}{3}cos(3x)dx$$

Reacomodamos los términos

$$I = \frac{1}{3}xcos(3x) - \frac{1}{3}\int cos(3x)\,dx$$

Tal como el nombre del método lo indica, hemos obtenido una parte de la integración, pero hay otra aún pendiente. Esta nueva integral, debería ser más fácil de resolver.

Observamos que la nueva integral, se puede resolver con un cambio de variable que aprendimos a hacer de manera rápida, por lo que:

$$I = \frac{1}{3}xcos(3x) - \frac{1}{3} \cdot \boldsymbol{\frac{1}{3}sen(3x)} + C$$

Finalmente:

$$I = \frac{1}{3}xcos(3x) - \frac{1}{9}sen(3x) + C$$

Puedes derivar la integral para verificar el resultado.

¡Importante!

No siempre tener que integrar un producto de funciones es sinónimo de usar el Método de integración por partes; tal como presentamos al inicio, primero debemos asegurarnos de que no se pueda efectuar un cambio de variable. Observa el siguiente planteamiento:

Comparemos las siguientes integrales

$\boldsymbol{\int xsen(x^2)dx}$	$\boldsymbol{\int xsen(x)dx}$

Aunque ambas integrales están compuestas del producto de dos funciones, tienen un proceso distinto de solución.

De hecho, la primera de ellas no se podría resolver utilizando el Método de integración por partes, ya que si $dv = sen(x^2)$, será imposible completar su diferencial para poder integrarla. Entonces, se resuelve por cambio de variable.

Ejemplo*.* Resolver la integral

$$I = \int 5x^2 e^{x/2} dx$$

Al comparar las funciones del integrando, una de ellas es algebraica y la otra exponencial, luego:

$$u = 5x^2 \qquad dv = e^{x/2}dx$$

$$du = 10xdx \qquad v = 2e^{x/2}$$

Sustituimos en la fórmula de integración por partes:

$$I = u \cdot v - \int vdu$$

$$I = 5x^2 \cdot 2e^{x/2} - \int 2e^{x/2} \cdot 10xdx$$

Efectuando operaciones y aplicando propiedades de integrales, tenemos:

$$I = 10x^2e^{x/2} - 20\int x\, e^{x/2}dx$$

Nos damos cuenta de que, si bien la nueva integral es más sencilla que la original, aún se tiene un producto, por lo que aplicamos nuevamente el método de integración por partes:

$$u = x \qquad\qquad dv = e^{x/2}dx$$

$$du = dx \qquad\qquad v = 2e^{x/2}$$

Al sustituir en la integral que tenemos, resulta:

$$I = 10x^2e^{x/2} - 20\left[x \cdot 2e^{x/2} - \int 2e^{x/2}dx\right]$$

Observa que se colocó un corchete debido a que la constante 20 afectaba a toda la integral, que se descompuso en dos términos.

Efectuando operaciones:

$$I = 10x^2e^{x/2} - 40xe^{x/2} + 40\int e^{x/2}dx$$

Ahora observamos que tenemos una nueva parte ya integrada, y que la nueva integral, ahora sí se puede efectuar de manera directa.

$$I = 10x^2e^{x/2} - 40xe^{x/2} + 40 \cdot \boldsymbol{2e^{x/2}} + C$$

Finalmente operamos las constantes

$$\boldsymbol{I = 10x^2e^{x/2} - 40xe^{x/2} + 80e^{x/2} + C}$$

Observación. En este ejemplo, hubo que aplicar dos veces el método de integración por partes debido a que el exponente de la función algebraica era 2. En general, cuando en Integración por partes, u sea la función algebraica, su exponente determinará el número de veces que se debe aplicar el método.

Ejemplo. Resolver la siguiente integral

$$I = \int 2x^3 ln(x^2)dx$$

Planteamos

$$u = ln\,(x^2) \qquad\qquad dv = 2x^3dx$$

$$du = \frac{2x}{x^2}dx \qquad\qquad v = \frac{2x^4}{4}$$

Sustituimos en la regla de integración por partes

$$I = u \cdot v - \int vdu$$

$$I = \ln(x^2) \cdot \frac{2x^4}{4} - \int \frac{2x^4}{4} \cdot \frac{2x}{x^2} dx$$

Simplificamos las fracciones y las potencias de x.

$$I = \frac{x^4 \ln{(x^2)}}{2} - \int x^3 dx$$

Integramos

$$\boldsymbol{I = \frac{x^4 \ln{(x^2)}}{2} - \frac{x^4}{4} + C}$$

Finalmente, proponemos un ejemplo en el que **ninguna** de las funciones involucradas en el integrando sea algebraica.

$$I = \int e^{-x} \cos{(2x)} dx$$

Obtenemos los componentes de la fórmula

$$u = cos(2x) \qquad dv = e^{-x} dx$$

$$du = -2sen(2x)dx \qquad v = -e^{-x}$$

Organizamos la fórmula

$$I = u \cdot v - \int v du$$

$$I = cos(2x)\,(-e^{-x}) - \int [-e^{-x}] \cdot [-2sen(2x)]\, dx$$

Simplificamos las constantes y reescribimos

$$I = -\,cos(2x)\, e^{-x} - 2 \int e^{-x} sen(2x)\, dx$$

La integral nueva tiene la misma dificultad que la original. Aplicamos de nuevo el método:

$$u = sen(2x) \qquad dv = e^{-x} dx$$

$$du = 2cos(2x)dx \qquad v = -e^{-x}$$

Sustituimos

$$I = -\,cos(2x)\, e^{-x} - 2 \left[sen(2x) \cdot (-e^{-x}) - \int (-e^{-x}) \cdot 2cos(2x)dx \right]$$

Desarrollamos el producto y operamos las constantes

$$I = -\,cos(2x)\, e^{-x} + 2sen(2x)e^{-xx} - 4 \int \cos(2x)\, e^{-x} dx$$

De nueva cuenta, la integral que ha quedado no se ha simplificado, pero podemos observar que la nueva integral es la que teníamos originalmente, y a la cual hemos llamado I, por lo que podemos remplazarla como se muestra:

$$I = -\,cos(2x)\,e^{-x} + 2sen(2x) - 4I$$

Finalmente podemos ver una ecuación, donde podemos agrupar los términos de I y despejar su equivalencia:

$$I + 4I = -\,cos(2x)\,e^{-x} + 2sen(2x)$$

$$5I = -\,cos(2x)\,e^{-x} + 2sen(2x)$$

$$\boldsymbol{I = \frac{-\,cos(2x)\,e^{-x} + 2sen(2x)}{5} + C}$$

Ejercicios: Utiliza el Método de Integración por partes para resolver las siguientes integrales

1) $\int xsen(x)dx$

2) $\int 3xe^{-2x}dx$

3) $\int xln(4x)dx$

4) $\int 3x^2\,cos(x)\,dx$

5) $\int 3x \cdot 3^x dx$

6) $\int ln^2(3x)dx$

7) $\int e^{2x}\cos(3x)\,dx$

8) $\int 5x^3 e^{4x}dx$

9) $\int \sqrt{x}\; \cdot ln(x)dx$

10) $\int \cos(lnx)\,dx$

11) $\int (x^2 - 2x + 3)lnxdx$

12) $\int (x^2 + 2x)\cos(x-5)\,dx$

Soluciones

1) $I = -xcos(x) + sen(x) + C$

2) $I = -\frac{3}{2}xe^{-2x} - \frac{3}{4}e^{-2x} + C$

3) $I = \frac{x^2 ln\,(4x)}{2} - \frac{x^2}{4} + C$

4) $I = 3x^2 sen(x) + 6xcos(x) - 6sen(x) + C$

5) $I = \frac{3x \cdot 3^x}{ln\,(3)} - \frac{3 \cdot 3^x}{ln^2(3)} + C$

6) $I = xln^2(3x) - 2xln(3x + 2x + C$

$7)\ I = \dfrac{2e^{2x}\,cos(3x) + 3e^{2x}sen(3x)}{13} + C$

$8)\ I = \dfrac{5}{4}x^3e^{4x} - \dfrac{15}{16}x^2e^{4x} + \dfrac{15}{32}xe^{4x} - \dfrac{15}{128}e^{4x} + C$

$9)\ I = \dfrac{2\,\sqrt{x^3}}{3}ln|x| - \dfrac{4\,\sqrt{x^3}}{9} + C$

$10)\ I = \dfrac{xcos(lnx) + xsen(lnx)}{2} + C$

$11)\ I = \left(\dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x\right)lnx - \dfrac{1}{9}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + C$

$12)\ I = (x^2 + 2x)sen(x - 5) + (2x + 2)cos(x - 5) - 2sen(x - 5) + C$

Problemas de aplicación en diferentes contextos

Una de las aplicaciones más recurrentes del Cálculo Diferencial e Integral es el estudio del movimiento de los cuerpos y partículas. Hay que tener presente que la rapidez instantánea v es la derivada de la función posición. Por otro lado, la aceleración es la derivada de la rapidez.

$$\text{Sean} \begin{cases} x(t){:}\, posición \\ v(t){:}\, rapidez \\ a(t){:}\, aceleración \end{cases} \quad de\ un\ cuerpo\ en\ el\ tiempo\ t$$

Para llegar de una ecuación a otra, podemos utilizar los conceptos de derivada e integral que hemos aprendido

Utilizando derivadas	**Utilizando integrales**
Posición $x(t)$	Aceleración $a(t)$
Rapidez $v(t) = x'(t)$	Rapidez $v(t) = \int a(t)dt$
Aceleración $a(t) = v'(t) = x''(t)$	Posición $x(t) = \int v(t)dt$

Ejemplo. Una persona lanza una pelota hacia arriba con una rapidez inicial $v_0 = 7\left[\frac{m}{s}\right]$ desde la azotea de una casa, cuya altura es $x_0 = 12[m]$

Determinar la altura máxima que alcanza la pelota, sin considerar el efecto de la resistencia del aire.

Solución: Sabemos que cuando el objeto es lanzado hacia arriba, poco a poco disminuirá su rapidez, debido a la acción de la gravedad.

Tiene sentido, asignar un signo negativo a la gravedad, debido a que, durante el ascenso del objeto, esta actúa en contra del movimiento.

Como deseamos saber la altura máxima que alcanza la pelota, debemos obtener una función que nos ayude a calcular su posición

Entonces, a partir de saber la aceleración, usamos el camino de las integrales para llegar a una ecuación de posición, pasando primero por la ecuación de rapidez:

$$v(t) = \int a(t)dt$$

Considerando la aceleración de la gravedad igual a $9.81\left[\frac{m}{s^2}\right]$, tenemos:

$$v(t) = \int -9.81dt = -9.81\int dt = -9.81t + C_1$$

Para estimar el valor de la constante de integración, como vimos anteriormente, necesitamos una condición inicial de rapidez, que justo es aquella con la que es lanzado el objeto,

Esto es: $v(0) = 7$

$$7 = -9.81(0) + C_1$$

Despejando: $C_1 = 7$

Por lo tanto, la rapidez está dada por la función

$$\boxed{\boldsymbol{v(t) = -9.81t + 7}}$$

Parece adecuada nuestra función, puesto que, en la subida, al aumentar el tiempo, se disminuye el valor de $v(t)$

Ahora, obtenemos la posición, en este caso, altura:

$$x(t) = \int v(t)dt = \int [-9.81t + 7]dt = -9.81\int tdt + 7\int dt = -9.81\frac{t^2}{2} + 7t + C_2$$

Para determinar el valor de C_2, requerimos una condición inicial, es decir, la altura inicial de la que fue lanzada la pelota $x(0) = 12$; sustituimos:

$$x(t) = -4.905t^2 + 7t + C_2$$

$$12 = -4.905(0)^2 + 7(0) + c_2$$

$$C_2 = 12$$

Finalmente, la función de posición estará dada por

$$\boxed{\boldsymbol{x(t) = -4.905t^2 + 7t + 12}}$$

Para poder utilizar la función de la altura, necesitamos saber el tiempo en el que el objeto alcanza su altura máxima.

Justo sabremos que alcanzó su altura máxima cuando su rapidez sea cero, pues a partir de ese momento, esta volverá a aumentar y el efecto de la gravedad ahora irá a favor del movimiento

Sustituyendo en la función de rapidez $v = 0$

$$v(t) = -9.8t + 7$$

$$0 = -9.81t + 7$$

Sabremos que el tiempo en el que se alcanza la altura máxima es: $t \approx 0.71s$

Sustituimos en la función de posición:

$$h_{máx} = x(0.71) = -4.905(0.71)^2 + 7(0.71) + 12$$

$$\boldsymbol{h_{máx} = 14.5m}$$

Ejercicios

1) La razón del porcentaje de eficiencia del operario de una máquina con respecto al tiempo está dada por la función $E'(t)30 - 10t$, donde t es el número de horas que el operario ha estado operando. Determinar la eficiencia del operario después de 4 horas

2) Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial $v = 30\frac{m}{s}$, desde $2m$ de altura; despreciando la resistencia del aire:

a) ¿Cuál será la rapidez del cuerpo después de 2 segundos?

b) ¿Cuánto tiempo tarde el cuerpo en llegar al punto más alto de su trayectoria?

c) ¿Cuál será la altura máxima que alcanzó?

3) Un globo aerostático asciende con una rapidez de $16\frac{ft}{s}$. Si se suelta un saco de arena desde una altura de $64[ft]$ sobre el nivel del suelo

a) ¿Cuántos segundos tardará en chocar con el suelo?

b) ¿Con qué velocidad llega al suelo?

Soluciones

1) $E = 40\%$

2) $a)\ v = 104\frac{m}{s}; b)\ t = 3.06s; c)\ h_{máx} = 47.91m$

3) $t = 2.56s; b)\ v = -65.97\frac{ft}{s}$

Unidad 4. Modelos y predicción

Presentación

Concluirá el estudio de la derivada y la integral, con la construcción de un modelo que las relacione para hacer predicciones sobre el comportamiento de situaciones planteadas.

En esta unidad se estudian fenómenos que involucran crecimiento o decaimiento de cantidades proporcionales a su tamaño. Por ejemplo, la masa de una sustancia radiactiva decae en cantidad proporcional a su masa inicial. Una población de animales o bacterias puede crecer de manera proporcional a su población a medida que pase el tiempo.

Situaciones de variación cuya rapidez de cambio es proporcional a la misma función

En el caso del crecimiento de una población $P(t)$, en donde t es el tiempo, si la rapidez de crecimiento $\frac{dP}{dt}$ es proporcional al tamaño de la población se obtiene

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Al valor de k se le conoce como *rapidez* o *tasa de crecimiento relativa.* Como la población está creciendo, el valor de k es positivo.

Para el decaimiento radiactivo de una sustancia $M(t)$ a través del tiempo, si la rapidez con la que se pierde masa es proporcional a la cantidad de materia radiactiva se tiene

$$\frac{dM}{dt} = kM$$

En este caso se tiene rapidez de decaimiento, por lo que la constante k es negativa. En general la rapidez de decaimiento de una sustancia radiactiva se expresa como la *vida media* o bien, *el tiempo de vida media*, el cual es el tiempo que transcurre para que la mitad de la sustancia se desintegre.

Método de separación de variables

Para resolver una ecuación en donde la rapidez de crecimiento o decaimiento es proporcional al tamaño de la población o de la masa respectivamente se usa el método de separación de variables. A continuación, se resolverá la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = kP$

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

$$\frac{dP}{P} = k\,dt \qquad \text{Separamos las variables}$$

$$
\begin{array}{rcll}
\displaystyle\int \frac{dP}{P} & = & \displaystyle\int k\, dt & \text{Integramos en ambos lados} \\
\ln(P) & = & kt + C & \text{Aplicamos la función exponencial en ambos lados} \\
P & = & e^{kt+C} & \text{Usamos propiedades de la exponencial} \\
P & = & e^{kt} \cdot e^{C} & \text{Hacemos } e^{C} = C_0 \\
P & = & C_0\, e^{kt} &
\end{array}
$$

Problemas de aplicación.

A continuación, vamos a resolver problemas cuya rapidez de cambio es proporcional a la misma función. Se usará la solución de la ecuación diferencial además de las leyes de los exponentes y logaritmos para obtener las soluciones completas.

Crecimiento poblacional

En un poblado la cantidad de personas crece de manera proporcional al número de personas P. La población en el tiempo $t = 0$ años es de 1200 habitantes y dicha cantidad se duplica en 45 años. ¿Cuántas personas habrá después de 60 años?

Solución: *Se tiene que la población crece de manera proporcional al número de habitantes, por lo que la función población está dada por* $P(t) = P_0 e^{kt}$ *en donde* $P_0 = 1200$ *es la población inicial.*

Falta determinar el valor de k *para tener la función completamente determinada, para lo cual usaremos que la población se duplica en 45 años. Por un lado, se tiene que* $P(45) = 2400$ *y por otro* $P(45) = 1200e^{k(45)}$*, igualando y resolviendo se tiene*

$$2400 = 1200e^{45k} \quad \Longrightarrow \quad \frac{2400}{1200} = e^{45k} \quad \Longrightarrow \quad 2 = e^{45k} \quad \Longrightarrow \quad \ln 2 = 45k$$

$$k = \frac{\ln 2}{45} \approx 0.0154$$

Por lo que la función que modela la situación es

$$P(t) = 1200e^{0.0154t}$$

Para saber cuántas personas habrá en el poblado después de 60 años, se necesita evaluar la función en $t = 60$.

$$P(60) = 1200e^{0.0154(60)} \approx 3023$$

Esto es, después de 60 años habrá aproximadamente 3023 personas.

Es importante recalcar que en este caso se tiene crecimiento de la población, por lo que el valor de k *positivo.*

Desintegración radiactiva

El radón-222 decae con una rapidez proporcional a la cantidad de la sustancia presente al tiempo t, es decir, $\frac{dr}{dt} = k \cdot r(t)$

Llamamos semivida o vida media al tiempo que debe transcurrir para que la cantidad de sustancia sea la mitad de lo que era originalmente. El radón tiene una semivida aproximada de 4 días. Si originalmente se tienen 120 gramos de radón, ¿cuántos gramos quedan después de 20 días transcurridos?

Solución: *Como la razón de cambio es proporcional a la cantidad de radón inicial, la función $r(t)$ está dada por $r(t) = C_0 e^{kt}$. La cantidad inicial de radón es 120 gramos, esto es, en el tiempo $t = 0$ se debe cumplir que $r(0) = 120 = C_0 e^{k(0)}$, por lo que*

$$C_0 e^{k(0)} = 120$$

$$C_0(1) = 120$$

$$C_0 = 120$$

La función está dada por $r(t) = 120e^{kt}$, solamente falta determinar el valor de la constante k. Es importante observar que la cantidad de radón va disminuyendo, por lo que el valor de k debe ser menor a cero.

Para determinar k usamos la vida media del radón, la cual es de cuatro días. Lo anterior se traduce en lo siguiente

$$r(4) = \frac{120}{2} = 60$$

Por otro lado, al evaluar la función $r(t) = 120e^{kt}$ evaluada en $t = 4$ se obtiene

$$r(4) = 120e^{k(4)}$$

Igualando las dos ecuaciones anteriores y resolviendo

$$60 = 120e^{4k} \quad \Longrightarrow \quad \frac{60}{120} = e^{4k} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} = e^{4k} \quad \Longrightarrow \quad ln\frac{1}{2} = 4k$$

$$k = \frac{ln\frac{1}{2}}{4} \approx -0.17329$$

Por lo que la función que modela el problema es

$$r(t) = 120e^{-0.17329t}$$

Ahora solamente falta ver qué cantidad de radón habrá después de 20 días, para lo cual evaluamos $r(t)$ en $t = 20$.

$$r(20) = 120e^{-0.17329(20)} = 3.75$$

Por lo que la cantidad de radón después de 20 días será 3.75 gramos.

En esta situación se tiene decaimiento, esto es, la cantidad de material va disminuyendo con el paso del tiempo, por lo que la constante k es negativa.

Ejercicios: Resuelve los siguientes problemas.

a) Una técnica para descubrir la antigüedad de un objeto antiguo (como un fósil, hueso o mueble), es medir la cantidad de Carbono 14 que contiene. Mientras están vivos, los animales y plantas tienen una cantidad constante de Carbono 14, pero cuando mueren esa cantidad disminuye.

   Se sabe que la rapidez de pérdida de Carbono 14 es directamente proporcional a la cantidad presente en t años. En el año 2003, el sur de Europa se encontró un fósil de reptil con 1.12 gramos de C14, y tres años después la cantidad disminuyó a 1.08 gramos.

   Los arqueólogos estiman, con base en su experiencia que la cantidad inicial de C14 en el fósil era 20.3 gramos ¿En qué año se generó el fósil?

b) En cierta ciudad, la población en cualquier tiempo cambia a una razón proporcional a la población existente. Si en 1980 había 20 000 habitantes y en 1990 había 24 000
   - Encuentra una función para la población en el tiempo t después de 1980.
   - ¿Cuál es la población esperada en el año 2010?

c) Suponga que la vida media de un isótopo radiactivo es de 330 años, ¿en cuánto tiempo habrá la décima parte de la cantidad inicial M_0 de sustancia?

d) En un laboratorio, para un cultivo de bacterias, se estimó que inicialmente había 120 bacterias y 250 después de una hora. Suponiendo que la rapidez de crecimiento es proporcional a la cantidad de bacterias presente, determinar:
   - Una función que indique la cantidad de bacterias después de t horas.
   - El tiempo que debe transcurrir para que la población se triplique.

Soluciones:

a) En el año 1764

b) La función para la población es $P(t) = 20000e^{0.018232t}$. La población en el año 2010 será 34560 personas.

c) En 1096 años habrá una décima parte de la cantidad inicial M_0 del isótopo.

d) La función que modela la cantidad de bacterias es $P(t) = 120e^{0.733969t}$ y el tiempo necesario para que la población de bacterias se triplique es 1.4968 horas.

Autoevaluación

A continuación, se muestra una evaluación para que midas tu aprendizaje. Resuelve con detalle todos los ejercicios y selecciona la respuesta correcta. Es importante mencionar que este NO es un modelo del examen extraordinario, son preguntas que te ayudarán a identificar los temas a los que necesitas dedicarle más tiempo para estudiar.

1. La presión sanguínea de una persona está dada por la función $P(t) = 100 + 20sen(2\pi t)$, donde P está dada en milímetros de mercurio y t en segundos. ¿Cuál es el rango de presión sanguínea que tiene esta persona?

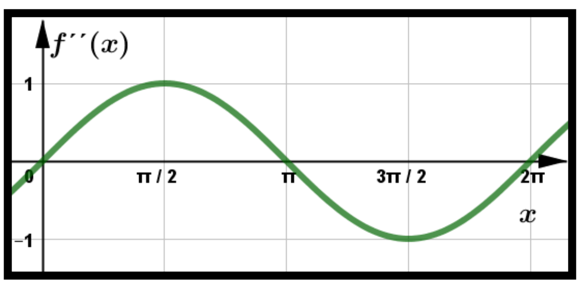
$a)$ $[20,100]$

$b)$ $[80,120]$

$c)$ $[100,120]$

$d)$ $[0,120]$

2. La siguiente gráfica representa a la segunda derivada de la función:



$a)$ $f(x) = sen(x)$

$b)$ $f(x) = cos(x)$

$c)$ $f(x) = -sen(x)$

$d)$ $f(x) = -cos(x)$

3. Determinar la derivada de la función $g(x) = 1 - 2tan(5 - 3x)$

$a)$ $g'(x) = 6\,sec^2(5 - 3x)$

$b)$ $g'(x) = 1 - 6\,sec^2(2x)$

$c)$ $g'(x) = -6\,sec^2(5 - 3x)$

$d)$ $g'(x) = 3\,sec^2(5 - 3x)$

4. Dada la función $f(t) = \sqrt{\cos(2t)}$, determinar su función derivada

$a)$ $f'(t) = -\dfrac{sen(2t)}{\sqrt{\cos(2t)}}$

$b)$ $f'(t) = \dfrac{2}{\sqrt{sen(2t)}}$

$c)$ $f'(t) = \sqrt{2sen(2t)}$

$d)$ $f'(t) = -\dfrac{sen(4t)}{2\sqrt{\cos(2t)}}$

5. La derivada de la siguiente función es:

$$m(x) = ln^3(4 - x^2)$$

$a)$ $m'(x) = \dfrac{-6x\,ln(4 - x^2)^2}{4 - x^2}$

$b)$ $m'(x) = \left[\dfrac{-2x}{ln\,(4 - x^2)}\right]^3$

$c)$ $m'(x) = \dfrac{-2x}{(4 - x^2)\,ln^3(4 - x^2)}$

$d)$ $m'(x) = \dfrac{-6xln^2(4 - x^2)}{4 - x^2}$

6. Hallar la derivada de la función $h(x) = \frac{sen(x^3)}{e^{2x}}$

$a)$ $h'(x) = \dfrac{3x^2e^{2x}cos(x^3) - 2e^{2x}sen(x^3)}{e^{4x^2}}$

$b)$ $h'(x) = \dfrac{2e^{2x}sen(x^3) - 3x^2e^{2x}cos(x^3)}{e^{2x^2}}$

$c)$ $h'(x) = \dfrac{3x^2cos(x^3) - 2sen(x^3)}{e^{2x}}$

$d)$ $h'(x) = \dfrac{e^{2x}cos(x^3) - sen(x^3)e^{2x}}{(e^{2x})^2}$

7. La pendiente de la recta tangente a la función $z(\omega) = e^{\cos(\omega)}$ en el punto $\omega = \frac{\pi}{2}$ es:

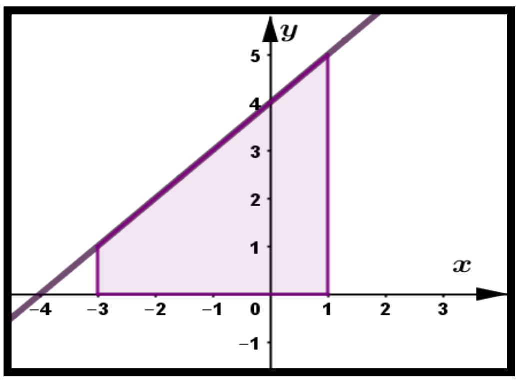
$a)\ m = -1$

$b)\ m = 1$

$c)\ m = -e$

$d)\ m = e$

8. Determinar la expresión con la que se calcula el área mostrada en la siguiente gráfica:



$a)\ A = \int_0^5 (x+4)dx$

$b)\ A = \int_{-3}^1 (x+4)dx$

$c)\ A = \int_1^{-3} (x+4)dx$

$d)\ A = \int_0^5 (x-4)dx$

9. Determina el valor de la integral definida:

$$\int_{-1}^{2} (3 - x^2)dx$$

$a)\ I_D = \frac{2}{3}$

$b)\ I_D = 6$

$c)\ I_D = -\frac{2}{3}$

$d)\ I_D = -6$

10. Establece que la derivada y la integral son operaciones inversas:

$a)$ Sumas de Riemann

$b)$ Teorema del valor medio

$c)$ Teorema Fundamental del Cálculo

$d)$ Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

11. Sabiendo que: $\int_0^9 f(x)dx = 15.4$, $\int_4^7 f(x)dx = 7.3$, $\int_7^9 f(x)dx = 3.5$

Determina el valor de $\int_0^4 f(x)dx$

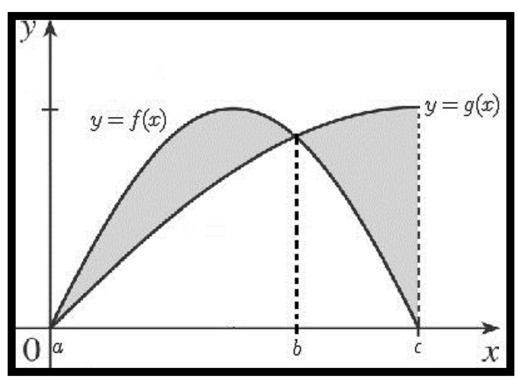
$a)$ 8.1

$b)$ 4.6

$c)$ 10.8

$d)$ 3.5

12. La expresión para calcular el área entre las dos curvas que se muestran en la figura es:



$$a)\ A = \int_a^c [f(x) - g(x)] - \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx - \int_b^c [g(x) - f(x)]dx$$

$$b)\ A = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c g(x)dx$$

$c)\ A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

$+ \int_b^c [g(x) - f(x)]dx$

$d)\ A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$

$+ \int_b^c [f(x) - g(x)]dx$

13. Determinar el área entre las curvas

$$\begin{cases} y = 5x - x^2 \\ y = x \end{cases} \ y\ las\ rectas\ x = 0\ y\ x = 4$$

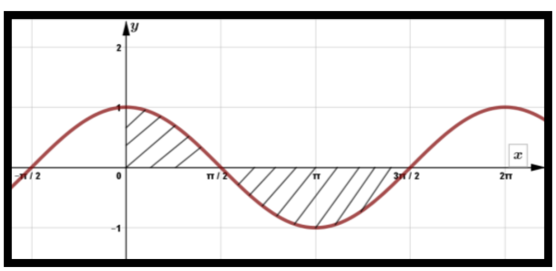
$a)\ A = \dfrac{32}{3}$

$b)\ A = 12$

$c)\ A = \dfrac{42}{3}$

$d)\ A = \dfrac{38}{3}$

14. La expresión con la cual se calcula el área mostrada en la figura es:



$a)\ A = \int_0^{3\pi/2} \cos(x)\, dx$

$b)\ A = \int_0^{\pi/2} \cos(x)\, dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(x)\, dx$

$c)\ A = 3\int_0^{\pi/2} \cos(x)\, dx$

$d)\ A = \int_0^{3\pi/2} \cos(x)\, dx - \int_0^{\pi/2} \cos(x)\, dx$

15. Utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_1^x (2t - 5)dt\right]$$

$a)\ f(x) = x^2 - 2$

$b)\ f(x) = 2x - 2$

$c)\ f(x) = x^2 - 5$

$d)\ f(x) = 2x - 5$

16. Al resolver la siguiente integral indefinida se obtiene:

$$\int \frac{5x^2 - 3}{2x} dx$$

$a)\ I = \dfrac{5x^2}{2} - \dfrac{3}{2} ln|x| + C$

$b)\ I = \dfrac{5x^2}{2} - \dfrac{3}{2} x + C$

$c)\ I = \dfrac{5x^2}{4} - \dfrac{3}{2} ln|x| + C$

$d)\ I = \dfrac{5x^2}{4} - \dfrac{3}{2} x + C$

17. Determinar la antiderivada de la función $f(x) = \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{7\sqrt[5]{x^3}}$

$a)\ F(x) = -\dfrac{2}{x} + \dfrac{5\sqrt[5]{x^2}}{7} + C$

$b)\ F(x) = -\dfrac{1}{2x^3} + \dfrac{2}{7\sqrt[5]{x^8}} + C$

$c)\ F(x) = -\dfrac{3}{2x^3} + \dfrac{5}{7\sqrt[5]{x^8}} + C$

$d)\ F(x) = -\dfrac{1}{2x} + \dfrac{5\sqrt[5]{x^2}}{7} + C$

18. Obtener la función primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = 2x + 3$, si se sabe que $F(-1) = -4$

$a)\ F(x) = x^2 + 3x + 2$

$b)\ F(x) = x^2 + 3x + 3$

$c)\ F(x) = x^2 + 3x - 2$

$d)\ F(x) = x^2 + 3x - 3$

19. Utilizar el método de cambio de variable para resolver la integral

$$\int 2x\,(x^2 - 1)^5 dx$$

$a)\ I = \dfrac{2x\,(x^2-1)^6}{6} + C$

$b)\ I = \dfrac{(x^2-1)^6}{6} + C$

$c)\ I = \dfrac{x^{12}}{6} - x^2 + C$

$d)\ I = \dfrac{(x^2-1)^4}{4} + C$

20. Utilizando el cambio de variable adecuado, determina la siguiente integral:

$$\int t \cdot cos\,(3t^2) dt$$

$a)\ I = \dfrac{1}{6} sen(3t^2) + C$

$b)\ I = t^2 sen(3t^2) + C$

$c)\ I = -\dfrac{1}{6} sen(3t^2) + C$

$d)\ I = \dfrac{t^2 sen(3t^2)}{2} + C$

21. Mediante el método de integración por partes, determina la siguiente integral:

$$\int 5xcos(x)dx$$

$a)\ I = 5xsen(x) + 5\cos(x) + C$

$b)\ I = 5xsen(x) - 5\cos(x) + C$

$c)\ I = xsen(5x) + 5\cos(x) + C$

$d)\ I = xsen(x) - 5\cos(x) + C$

22. Resuelve la integral por el método de integración por partes:

$$\int xe^{2x} dx$$

$a)\ I = xe^{2x} - e^{2x} + C$

$b)\ I = \dfrac{1}{2}xe^{2x} - \dfrac{1}{2}e^{2x} + C$

$c)\ I = xe^{2x} - \dfrac{1}{4}e^{2x} + C$

$d)\ I = \dfrac{1}{2}xe^{2x} - \dfrac{1}{4}e^{2x} + C$

23. Si un cultivo de 80 bacterias crece a una razón proporcional al tamaño de la población presente, y 2 horas después hay 300 bacterias ¿cuál es la ecuación diferencial que describe esta situación? Hay que considerar que B es la cantidad de bacterias y t es el tiempo en horas.

$a)\ \dfrac{dB}{dt} = kB$

$b)\ \dfrac{dB}{dt} = 80B$

$c)\ dt = kBdB$

$d)\ \dfrac{dB}{dt} = 80t$

24. Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 5y$, si se sabe que cuando $x = 0, y = 3$

$a)\ y = 5e^{3x}$

$b)\ y = 3e^{5x}$

$c)\ y = \frac{1}{5}e^{3x}$

$b)\ y = \frac{1}{3}e^{5x}$

25. El modelo matemático que describe la depreciación de un auto $P(t)$ en el tiempo t, tiene una estructura como la siguiente:

$a)\ P(t) = P_0e^{kt}$

$b)\ P(t) = -P_0e^{kt}$

$c)\ P(t) = P_0e^{-kt}$

$d)\ P(t) = -P_0e^{-kt}$

Solución:

1) b	6) c	11) b	16) c	21) a
2) c	7) a	12) c	17) d	22) d
3) a	8) b	13) a	18) c	23) a
4) a	9) a	14) c	19) b	24) b
5) d	10) c	15) d	20) a	25) c

Fuentes Consultadas

- Bartkovich, K. et al. (1999). *Contemporary Calculus through applications.* USA: Everyday Learning Corporation.
- Bittinger, Marvin. (2002). *Cálculo para Ciencias Económico-administrativas.* Séptima edición. Colombia: Addison-Wesley.
- Bittinger, M. (2000). *Calculus and its applications*. USA: Addison Wesley Longman
- Goldstein, L. J. et. al. (1987). *Cálculo y sus aplicaciones.* México: Prentice-Hall Hispanoamericana.
- Hughes, Deborah et. al. (2002). *Cálculo Aplicado*. México: CECSA.
- Leithold, Louis. (1998). *El cálculo*. Séptima edición. México: Oxford University Press.
- Lial, M. & Miller, Ch. (1989). *Calculus with applications.* USA: Scott, Foresman and Company
- Polya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.
- Purcel, Edwin J. *et al*. (2007). *Cálculo*. Novena edición. México: Pearson Educación Prentice Hall.
- Salinas, Patricia, et. al. (2004). *Elementos del Cálculo*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Stewart, James, et al. (2012). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo*. Sexta edición. México: CENGAGE Learning.
- Stewart, James. (2012). *Cálculo de una variable, trascendentes tempranas.* Séptima edición. México: CENGAGE Learning.
- Swokowski, Eart W. (1987). *Introducción al Cálculo con geometría analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Thomas, G. (1964). *Calculus.* Japan: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- https://www.academia.edu/11407910/INTEGRALES_INDEFINIDAS Recuperado el 15 de agosto de 2019.
- http://revistas.educa.jcyl.es/divergaceta/index.php/juegos/comojugar/726-como-jugar-a-pies-quietos Recuperado el 15 de agosto de 2019.